Soit l'ensemble d'entraînement suivant :

$\mathbf{x}_t$	y_t
$[1,3,5]$	1
$[5,5,3]$	1
$[4,4,0]$	0
$[1,2,4]$	0
$[2,2,2]$	0
$[8,0,0]$	0
$[1,1,1]$	0
$[2,5,5]$	1
$[3,3,3]$	1
$[0,0,9]$	1

Soit une entrée de test $\mathbf{x} = [4.2, 2.1, 3.7]$.

1. Donnez la classe de $\mathbf{x}$ qui serait prédite par l'algorithme des k plus proches voisins basé sur la distance Euclidienne $d_1(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sqrt{\sum_i (x_i - x'_i)^2}$, **et ce pour** $k = 1$**,** $k = 3$ **et** $k = 5$.

   Solution : les distances Euclidiennes sont :

$\mathbf{x}_t$	y_t	$d_1(\mathbf{x}_t, [4.2, 2.1, 3.7])$
$[1,3,5]$	1	3.569
$[5,5,3]$	1	3.089
$[4,4,0]$	0	4.164
$[1,2,4]$	0	3.216
$[2,2,2]$	0	2.782
$[8,0,0]$	0	5.704
$[1,1,1]$	0	4.329
$[2,5,5]$	1	3.865
$[3,3,3]$	1	1.655
$[0,0,9]$	1	7.081

   Le plus proche voisin est $[3,3,3]$, dont la classe est 1. La prédiciton est donc 1.

   Les 3 plus proches voisins sont $[3,3,3]$, $[2,2,2]$ et $[5,5,3]$, dont les classes sont 1, 0 et 1 respectivement. La classe majoritaire est 1. La prédiction est donc 1.

   Les 5 plus proches voisins sont $[3,3,3]$, $[2,2,2]$, $[5,5,3]$, $[1,2,4]$ et $[1,3,5]$, dont les classes sont 1, 0, 1, 0 et 1 respectivement. La classe majoritaire est 1. La prédiction est donc 1.

2. Donnez également les prédictions pour $k = 1$, $k = 3$ et $k = 5$, mais pour la distance de Manhattan $d_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \sum_i |x_i - x'_i|$.

   Solution : les distances de Manhattan sont :

$\mathbf{x}_t$	y_t	$d_2(\mathbf{x}_t, [4.2, 2.1, 3.7])$
$[1,3,5]$	1	5.4
$[5,5,3]$	1	4.4
$[4,4,0]$	0	5.8
$[1,2,4]$	0	3.6
$[2,2,2]$	0	4
$[8,0,0]$	0	9.6
$[1,1,1]$	0	7
$[2,5,5]$	1	6.4
$[3,3,3]$	1	2.8
$[0,0,9]$	1	11.6

   Le plus proche voisin est $[3,3,3]$, dont la classe est 1. La prédiciton est donc 1.

Les 3 plus proches voisins sont $[3, 3, 3]$, $[1, 2, 4]$ et $[2, 2, 2]$, dont les classes sont 1, 0 et 0 respectivement. La classe majoritaire est 0. La prédiction est donc 0.

Les 5 plus proches voisins sont $[3, 3, 3]$, $[1, 2, 4]$, $[2, 2, 2]$, $[5, 5, 3]$ et $[1, 3, 5]$, dont les classes sont 1, 0, 0, 1 et 1 respectivement. La classe majoritaire est 1. La prédiction est donc 1.

Soit la fonction :

$$g(\mathbf{x}) = \frac{x_1 + x_2^2 - \log(x_3)}{\exp(x_2) + x_4}$$

Calculez toutes les dérivées partielles, c'est-à-dire :

1. $\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_1}$
   Solution :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_1} &= \frac{1}{\exp(x_2) + x_4}\left(\frac{\partial\ x_1 + x_2^2 - \log(x_3)}{\partial x_1}\right) \\
&= \frac{1}{\exp(x_2) + x_4}
\end{aligned}$$

2. $\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_2}$
   Solution :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_2} &= \frac{\frac{\partial\ x_1 + x_2^2 - \log(x_3)}{\partial x_2}(\exp(x_2) + x_4) - (x_1 + x_2^2 - \log(x_3))\frac{\partial\ \exp(x_2) + x_4}{\partial x_2}}{(\exp(x_2) + x_4)^2} \\
&= \frac{2x_2(\exp(x_2) + x_4) - (x_1 + x_2^2 - \log(x_3))\exp(x_2)}{(\exp(x_2) + x_4)^2}
\end{aligned}$$

3. $\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_3}$
   Solution :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_3} &= \frac{1}{\exp(x_2) + x_4}\left(\frac{\partial\ x_1 + x_2^2 - \log(x_3)}{\partial x_3}\right) \\
&= \frac{1}{\exp(x_2) + x_4}\left(\frac{-1}{x_3}\right) \\
&= \frac{-1}{x_3(\exp(x_2) + x_4)}
\end{aligned}$$

4. $\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_4}$
   Solution :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_4} &= (x_1 + x_2^2 - \log(x_3))\left(\frac{\partial\ \frac{1}{\exp(x_2) + x_4}}{\partial x_4}\right) \\
&= (x_1 + x_2^2 - \log(x_3))\frac{-1}{(\exp(x_2) + x_4)^2}\left(\frac{\partial\ \exp(x_2) + x_4}{\partial x_4}\right) \\
&= (x_1 + x_2^2 - \log(x_3))\frac{-1}{(\exp(x_2) + x_4)^2} \\
&= \frac{-x_1 - x_2^2 + \log(x_3))}{(\exp(x_2) + x_4)^2}
\end{aligned}$$