IFT 615 – Intelligence artificielle

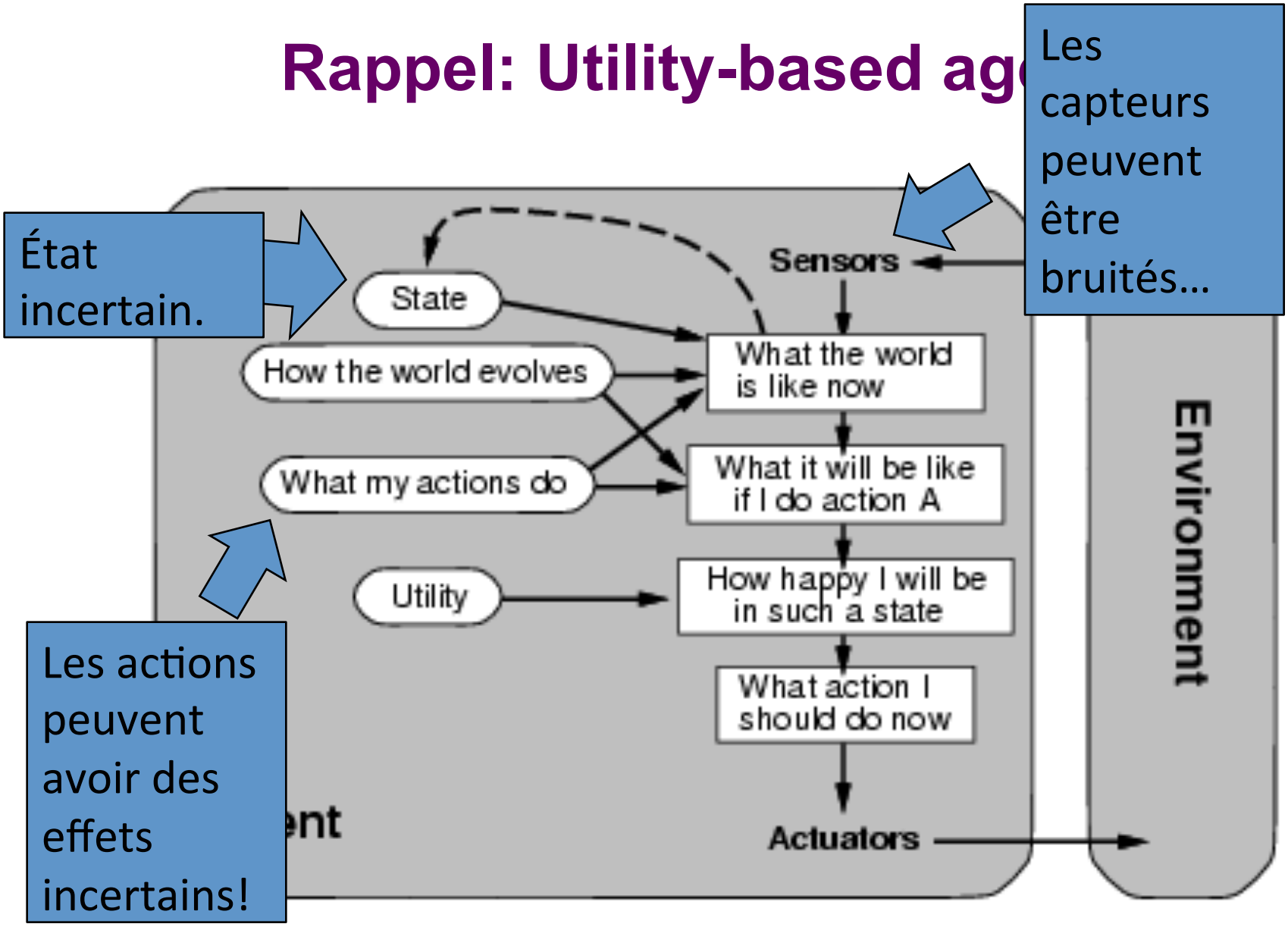
Processus de décision markoviens (MDP)

Hugo Larochelle
Département d'informatique
Université de Sherbrooke
http://www.dmi.usherb.ca/~larocheh/cours/ift615.html

Sujets couverts

- Processus de décision de Markov (MDP)
- Algorithme d'itération par valeurs (*value-iteration*)
- Algorithme d'itération par politiques (*policy-iteration*)

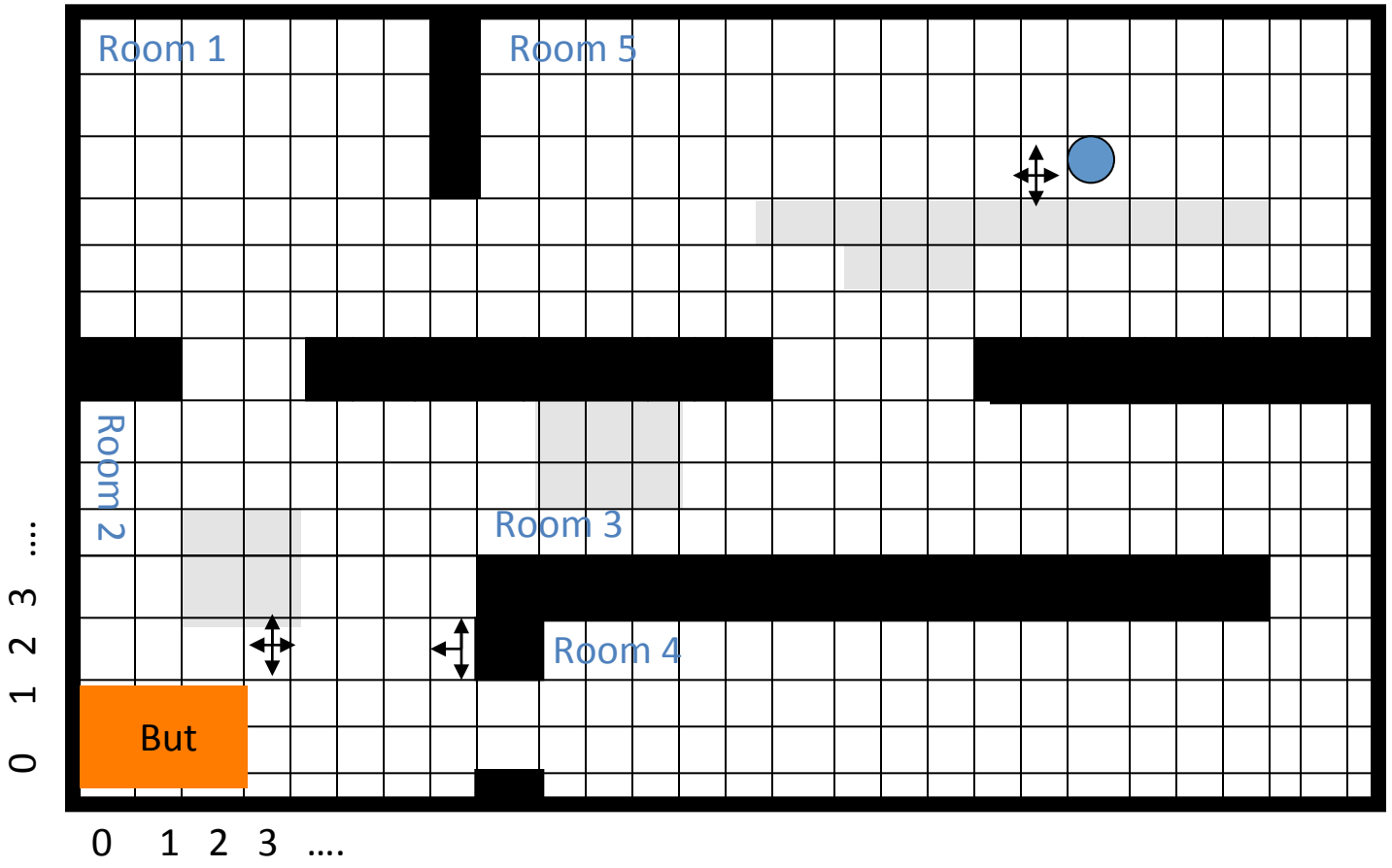
Rappel: Utility-based ag



Incertitude dans le contexte d'une décision

- Soit A_t l'action d'aller à l'aéroport t minutes avant le départ de l'avion
- A_t me permettra-t-il d'arriver à temps?
- Problèmes:
  - observabilité partielle (conditions routières, etc.)
  - senseurs bruités (annonces du trafic, etc.)
  - incertitude dans l'effet des actions (crevaisons, pannes, etc.)
  - immense complexité pour modéliser les actions et le trafic

Grille (occupancy grid)



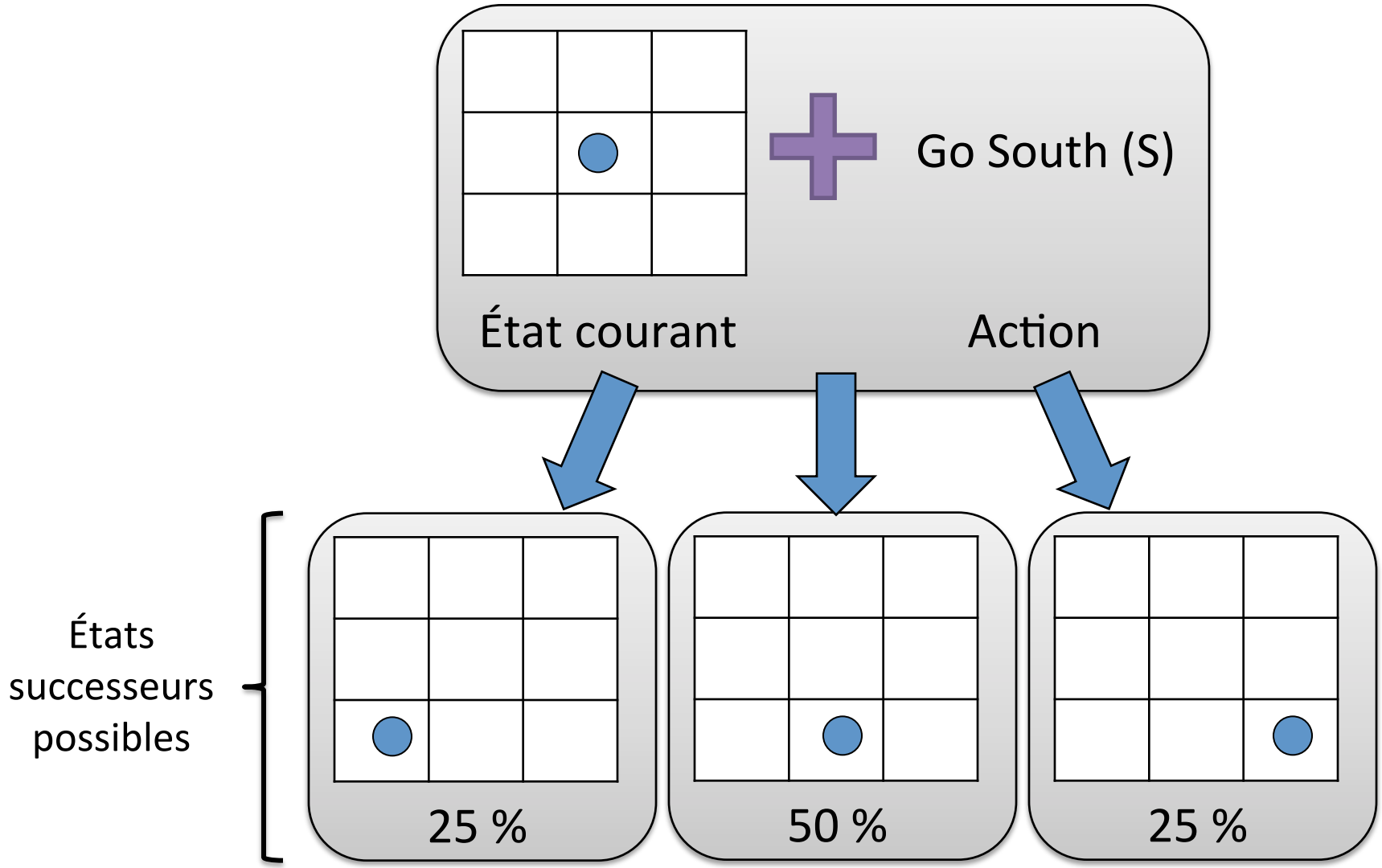
Actions:
E: Go east
W: Go west
S: Go south
N: Go north

Degré de désirabilité

0 -0.4

But : +1

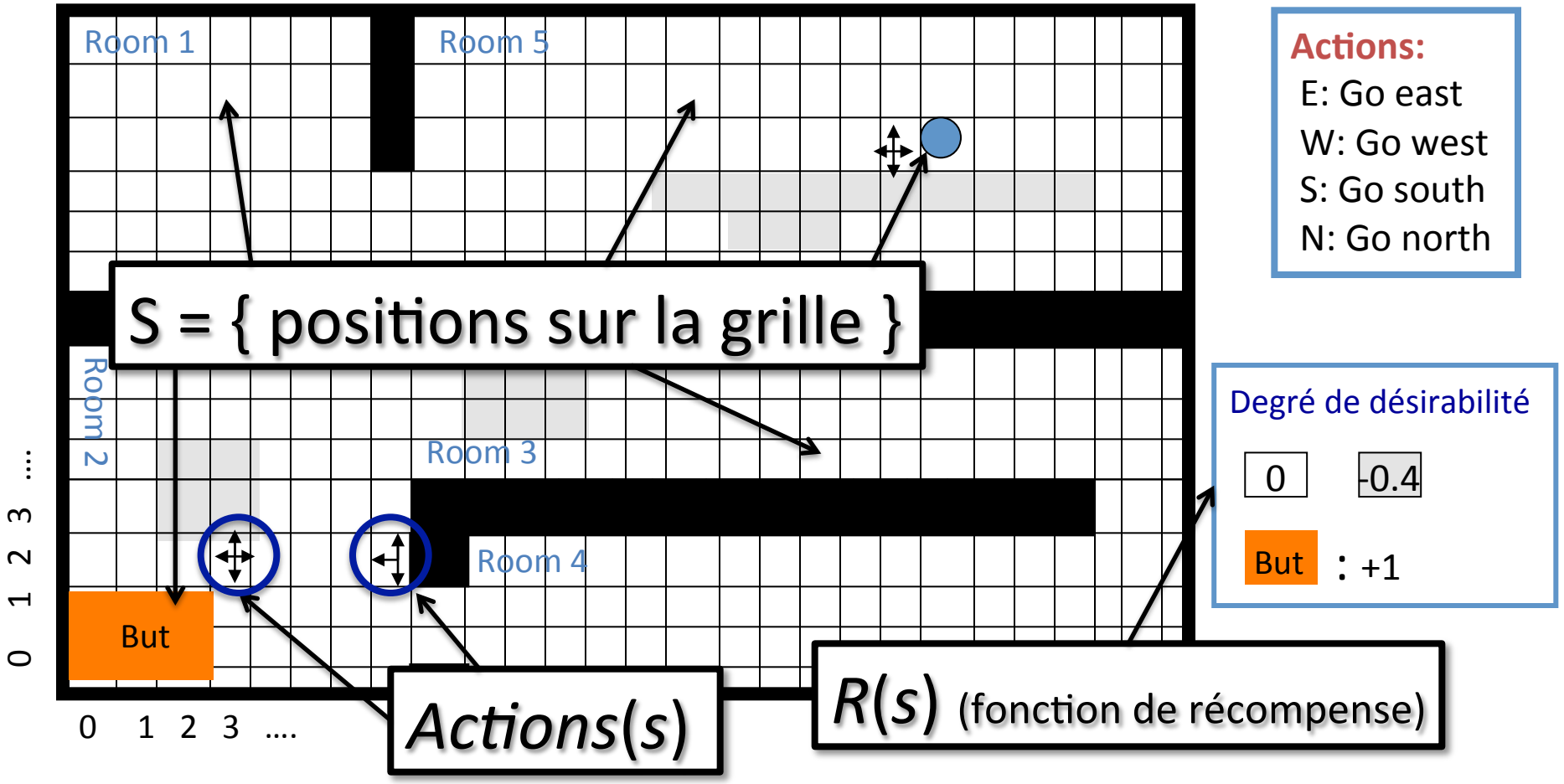
Actions aux effets incertains



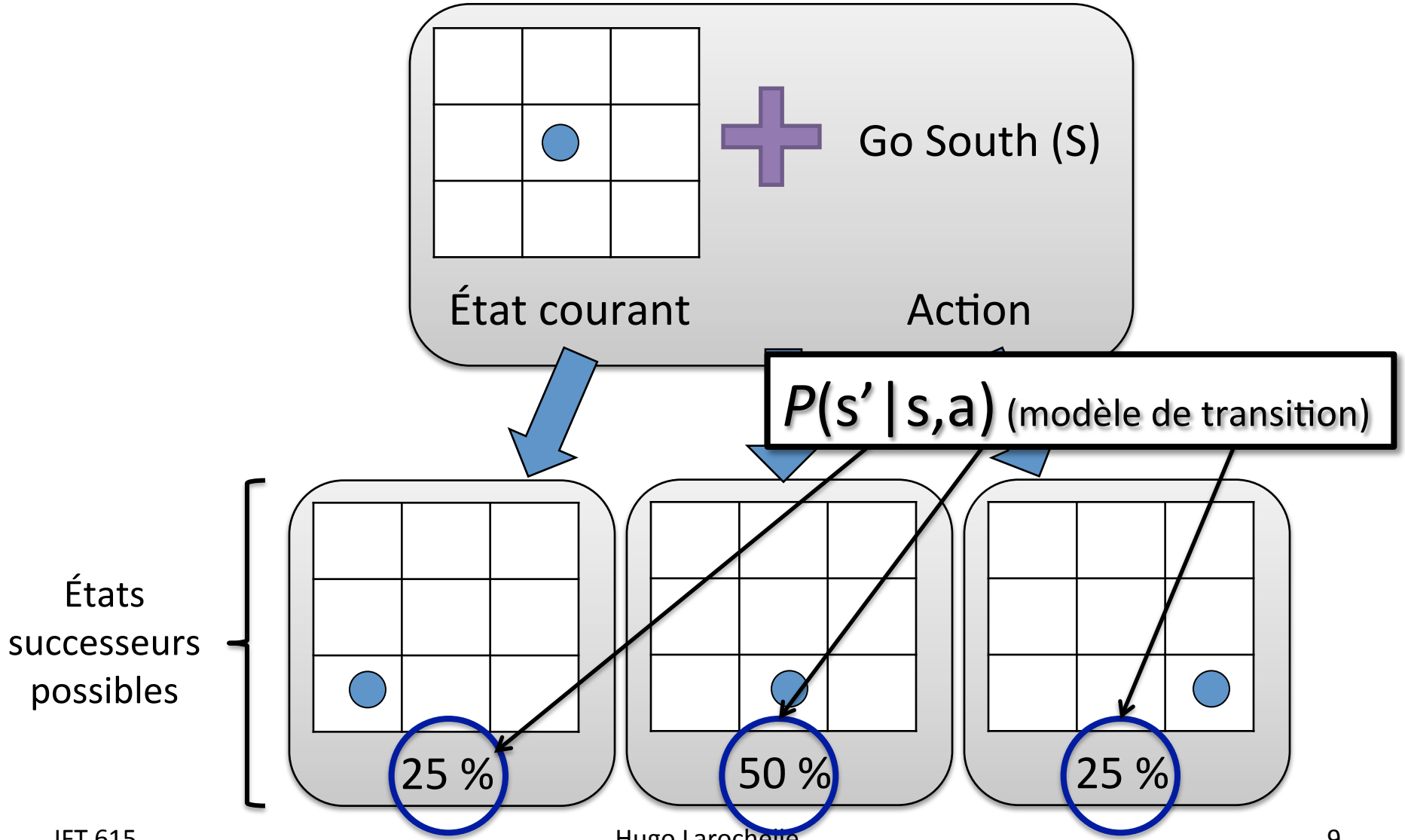
Processus de décision markovien

- Un **processus de décision markovien** (***Markov decision process***, ou **MDP**) est défini par:
  - un **ensemble d'états** S (incluant un étant initial s_0)
  - un **ensemble d'actions** possibles $Actions(s)$ lorsque je me trouve à l'état s
  - un **modèle de transition** $P(s' | s, a)$, où a $\in A(s)$
  - une **fonction de récompense** $R(s)$ (utilité d'être dans l'état s)
- Un MDP est donc un modèle général pour un environnement stochastique dans lequel un agent peut prendre des décisions et reçoit des récompenses
- On y fait une supposition markovienne (de premier ordre) sur la distribution des états visités
- Requière qu'on décrive un objectif à atteindre à partir d'une fonction de récompense basée seulement sur l'état courant

Grille (occupancy grid)

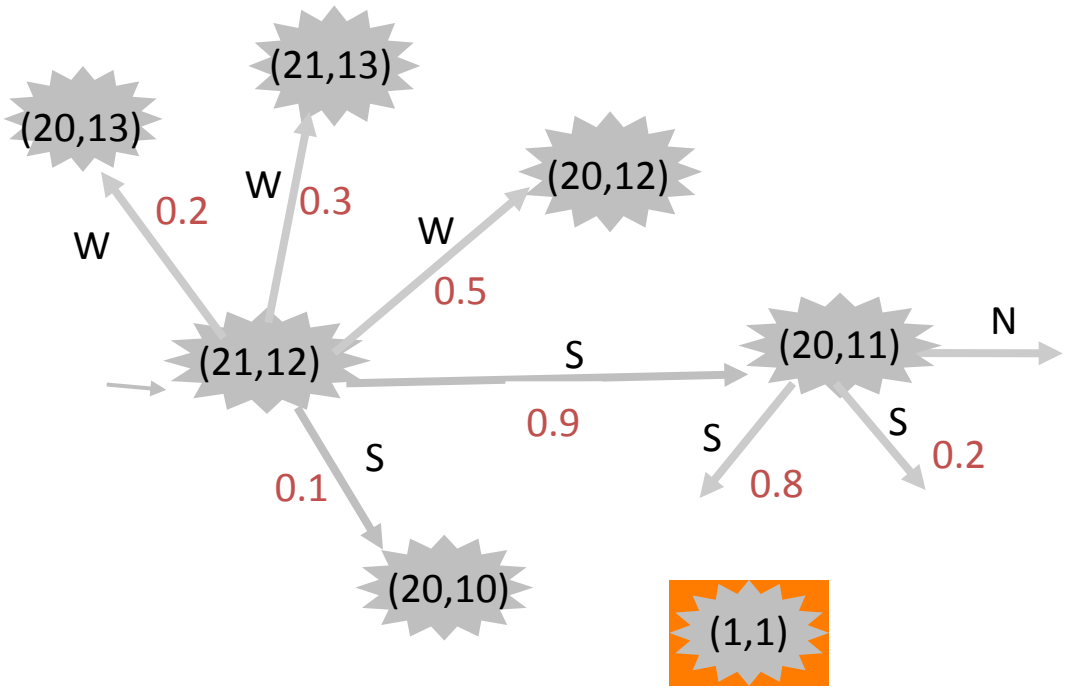


Actions aux effets incertains



Décision

- Une **décision** est un choix d'une action dans un état
- C'est une règle « *if state then action* »

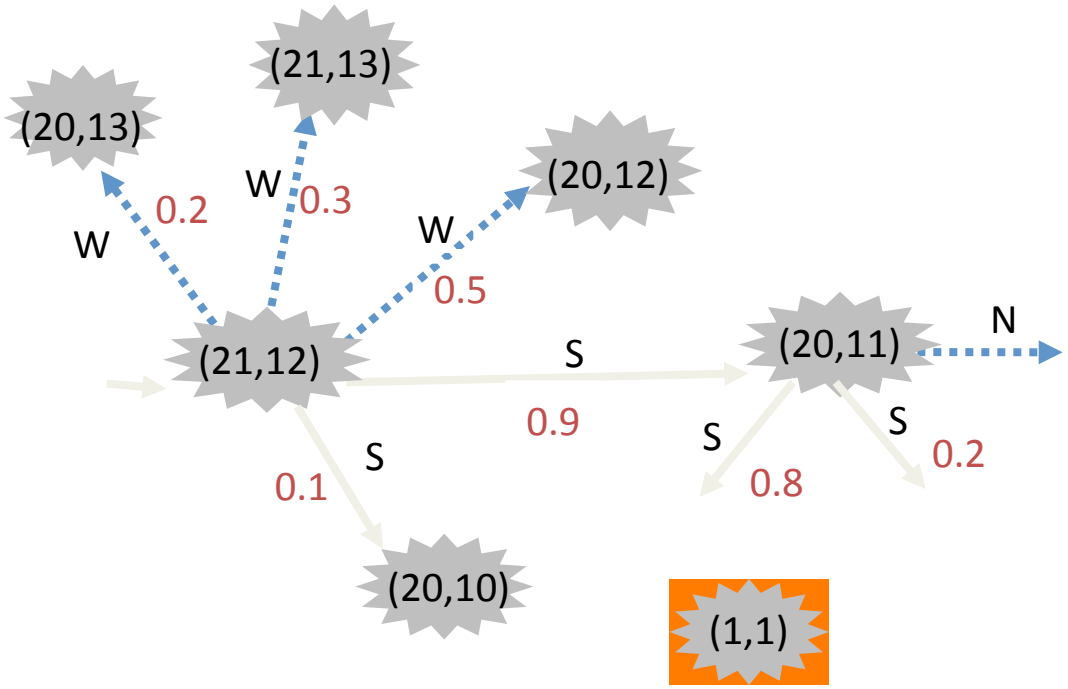


Exemples:

(21,12) → W
ou
(21,12) → E

Plan (politique)

- Un **plan** est une stratégie: choix d'une action (décision) **pour chaque état**
- Un plan est également appelé une politique (*policy*)
- C'est un ensemble de règles *if state then action*



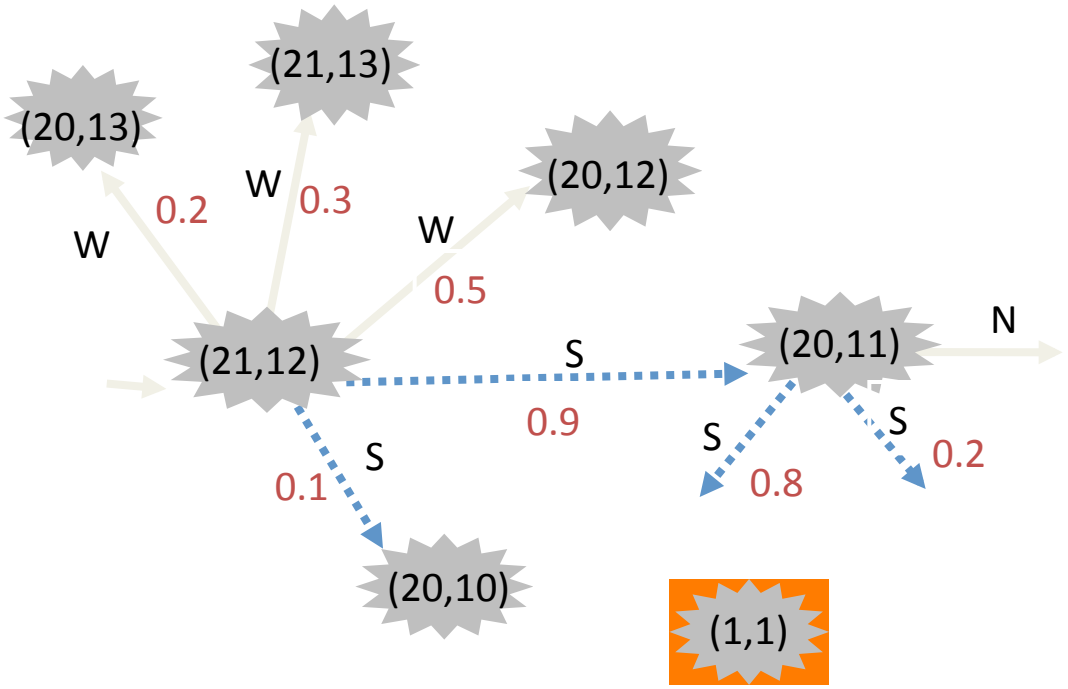
Exemples:

Plan π1

{ (21,12) → W,
(20,13) → S,
(21,13) → S,
(20,11) → N,
…
}

Plan (politique)

- Un **plan** est une stratégie: choix d'une action (décision) **pour chaque état**
- Un plan est également appelé une politique (*policy*)
- C'est un ensemble de règles *if state then action*



Exemples:

Plan π1

{ (21,12) → W,
(20,13) → S,
(21,13) → S,
(20,11) → N,
…
}

Plan π2

{ (21,12) → S,
(20,11) → S,
(21,10) → E,
….}

Exécution d'un plan (politique)

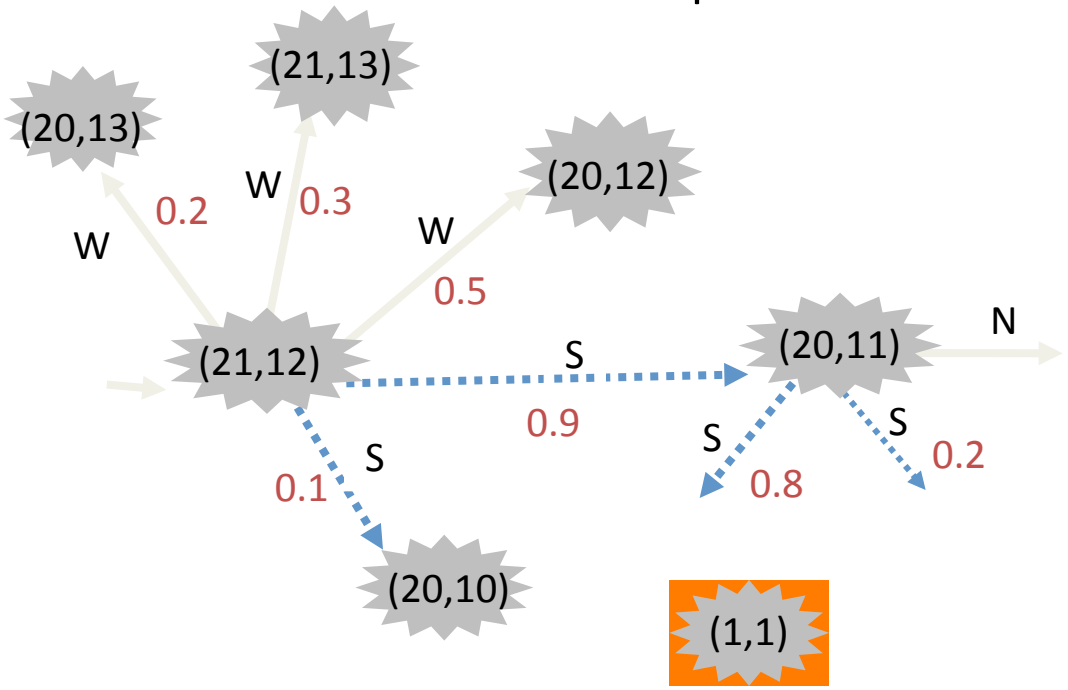
- Un plan est un ensemble de règles *if state then action*
- Notons $\pi(s)$ l'action désignée par le plan π dans l'état s
- Voici un algorithme d'exécution ou d'application d'un plan

```
While (1)
{
    1. s = état courant du système;
    2. a = π(s);
    3. execute a;
 }
```

- L'étape 1 peut impliquer de la détection (*sensing*) et de la localisation
- L'état résultant de l'exécution de l'action à l'étape 3 est imprévisible

Interprétation/application d'un plan

- L'application d'un plan dans un MDP **résulte en une chaîne de Markov** sur les états, avec une matrice de transition dont les entrées sont données par $P(s'|s, \pi(s))$
- La chaîne se déroule en un arbre potentiellement infini



Exemples:

Plan π1

{ (21,12) → W,
(20,13) → S,
(21,13) → S,
(20,11) → N,
…
}

Plan π2

{ (21,12) → S,
(20,11) → S,
(21,10) → E,
….}

Valeur d'un plan

- $R(s)$: **récompense** pour l'état s, c-à-d. l'utilité de l'état s

- $V(\pi,s)$: **valeur** du plan π à l'état s
  - $V(\pi,s) = R(s) + \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s, \pi(s)) V(\pi, s')$
    - γ: facteur d'escompte ($0 < \gamma <= 1$), indique l'importance des récompenses futures
    - S: espace d'états
    - $\pi(s)$: action du plan à l'état s
    - $P(s'|s, \pi(s))$: probabilité de la transition du MDP

Plan optimal

- Un plan π **domine** un plan π' si les deux conditions suivantes sont réunies:
  - $V(\pi,s) >= V(\pi',s)$ pour tout état s
  - $V(\pi,s) > V(\pi',s)$ pour au moins un s
- Un plan est **optimal** s'il n'est pas dominé par un autre
- Il peut y avoir plusieurs plans optimaux, mais ils ont tous la même valeur
- On peut avoir deux plans **incomparables** (aucun ne domine l'autre)
  - la dominance induit une fonction d'ordre partiel sur les plans
- Deux algorithmes différents pour le calcul du plan optimal:
  - **itération par valeurs** (***value iteration***)
  - **itération par politiques** (***policy iteration***)

Équations de Bellman pour la valeur optimale

- Les **équations de Bellman** nous donnent une condition qui est garantie par la valeur V^* des plans optimaux

$$V^*(s) = R(s) + \max_a \gamma \sum_{s' \in S} P(s' \mid s,a)\, V^*(s') \quad \forall\, s \in S$$

- Si nous pouvons calculer V^*, nous pourrons calculer un plan optimal aisément:
  - il suffit de choisir dans chaque état s l'action qui maximise $V^*(s)$ (c.-à-d. le argmax)

Algorithme Value Iteration

1. Initialiser $V(s)$ à 0 pour chaque état s.
2. Répéter (jusqu'à ce que le changement en V soit négligeable).
   I. pour chaque état s calculer:
   $$V'(s) = R(s) + \max_a \gamma \Sigma_{s' \in S} P(s'|s,a)\ V(s')$$
   II. si $|V - V'| \leq$ tolérance, quitter
   III. $V \leftarrow V'$
3. Le plan optimal est obtenu en choisissant pour chaque état s l'action a telle que la valeur $\gamma \Sigma_{s' \in S} P(s'|s,a)\ V(s')$ est la plus élevée

- En mots, on choisit l'action qui **maximise l'espérance** des valeurs des successeurs
- Converge au plan optimal en $O(|S|^3)$

Démonstration de Value Iteration

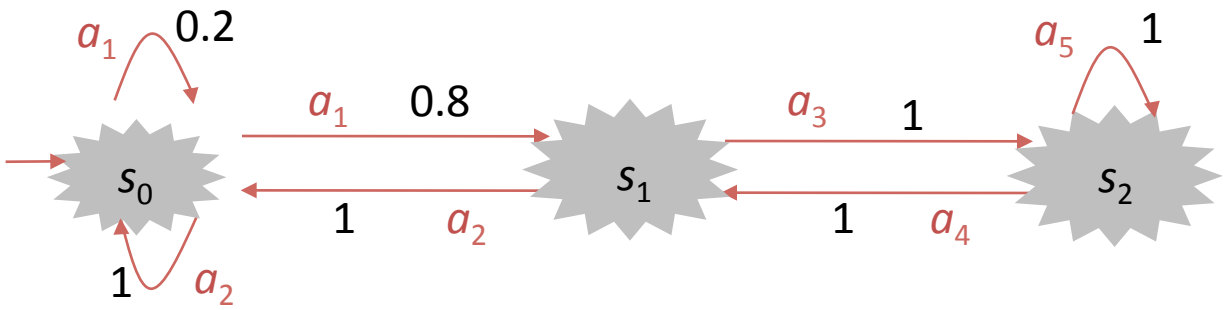
- http://planiart.usherbrooke.ca/~eric/ift615/demos/vi/

Algorithme Policy Iteration

1. Choisir un plan arbitraire π'
2. Répéter jusqu'à ce que π devienne inchangée:
   I. $\pi := \pi'$
   II. pour tout s dans S, calculer $V(\pi,s)$ en résolvant le système de $|S|$ équations et $|S|$ inconnues
   $$V(\pi,s) = R(s) + \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s, \pi(s))\, V(\pi,s')$$
   III. pour tout s dans S, s'il existe une action a telle que
   $$[\, R(s) + \gamma \sum_{s' \in S} P(s'|s,a)\, V(\pi,s') \,] > V(\pi,s)$$
   alors $\pi'(s) := a$ sinon $\pi'(s) := \pi(s)$
3. Retourne π

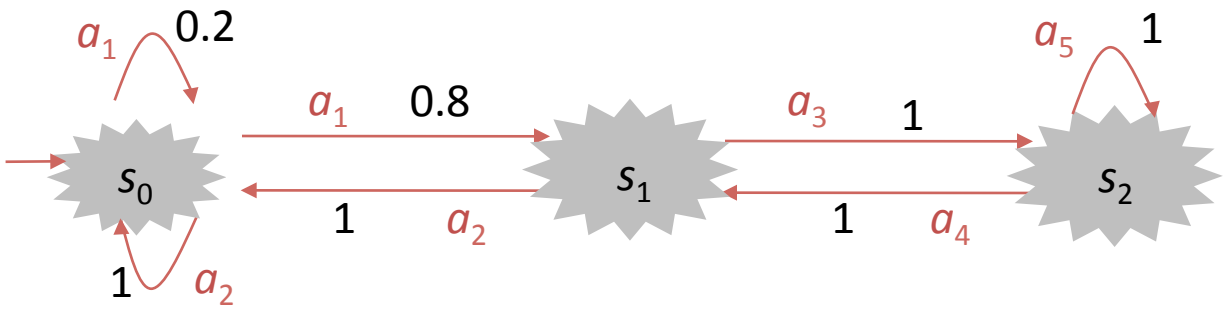
- Converge au plan optimal en $O(|S|^3)$

Exemple (policy iteration)



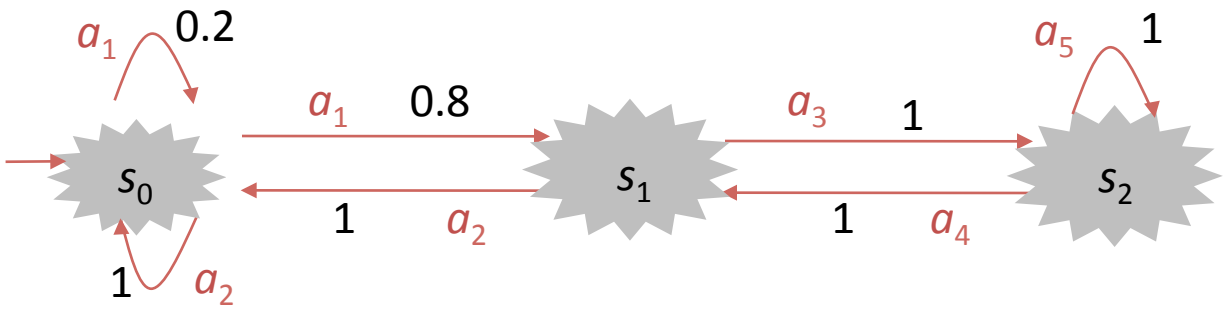
- MDP à 3 états: $S = \{s_0, s_1, s_2\}$
- But: s_2

Exemple (policy iteration)



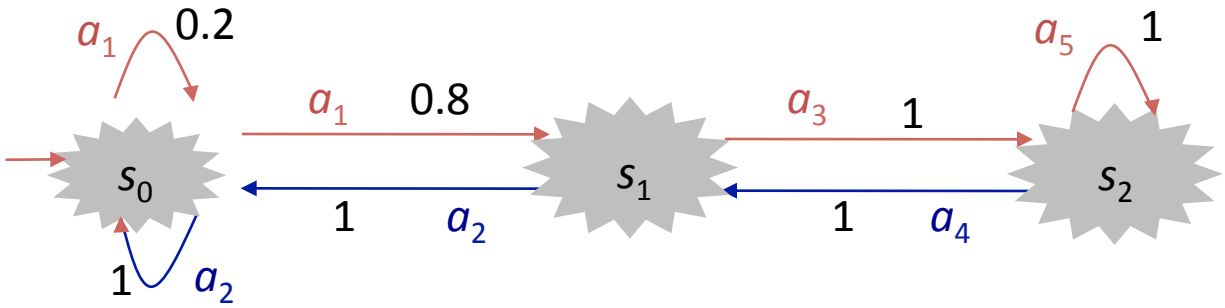
- MDP à 3 états: $S = \{s_0, s_1, s_2\}$
- Le but (atteindre s_2) est exprimé par une fonction de récompense:
  - $R(s_0) = 0$, $R(s_1) = 0$, $R(s_2) = 1$
- Le facteur d'escompte est γ=0.5

Rappel: équation de la valeur d'un plan



- $V(\pi,s)$: valeur du plan π dans l'état s
  - $V(\pi,s) = R(s) + \gamma \Sigma_{s' \in S} P(s'|s, \pi(s)) V(\pi, s')$
- Notons $r_i=R(s_i)$ et $v_i = V(\pi,s_i)$:
  - $v_i = r_i + \gamma \Sigma_j P(s_j|s_i, \pi(s_i)) v_j$

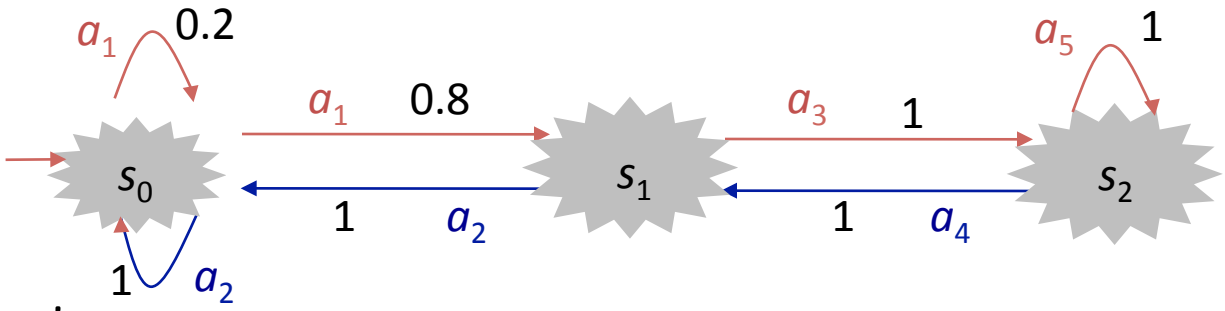
Policy iteration: initialisation



- Plan initial choisi arbitrairement:

$$\pi' = \{ s_0 \rightarrow a_2,$$
$$s_1 \rightarrow a_2,$$
$$s_2 \rightarrow a_4 \}$$

Policy iteration: itération #1

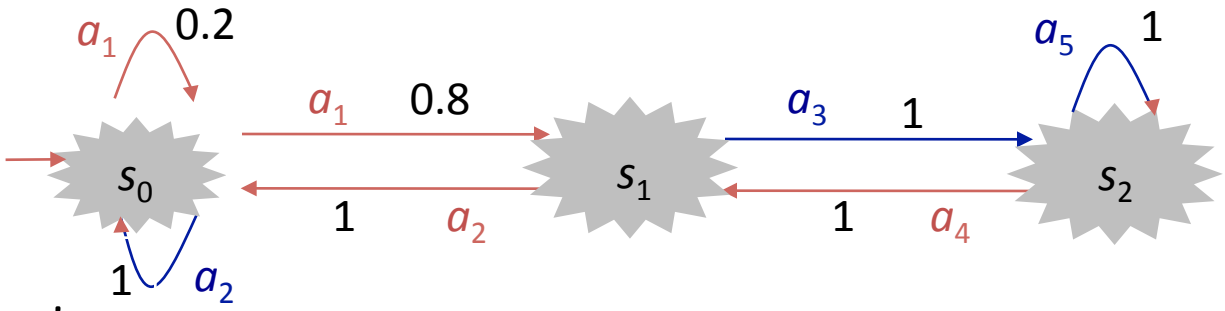


I. $\pi = \pi'$

II. Équations: $v_0=0+0.5*(1*v_0)$;
$v_1=0+0.5*(1*v_0)$;
$v_2=1+0.5*(1*v_1)$
Solution: $v_0=0$, $v_1=0$, $v_2=1$

III. $s_0 \rightarrow a_1$: $0+0.5*(0.2*0+0.8*0)=0$; ne change pas
$s_1 \rightarrow a_3$: $0+0.5*(1*1)=0.5 > 0$; **change**
$s_2 \rightarrow a_5$: $1+0.5*(1*1)=1.5 > 1$; **change**
$\pi' = \{ s_0 \rightarrow a_2 , s_1 \rightarrow a_3 , s_2 \rightarrow a_5 \}$

Policy iteration: itération #2

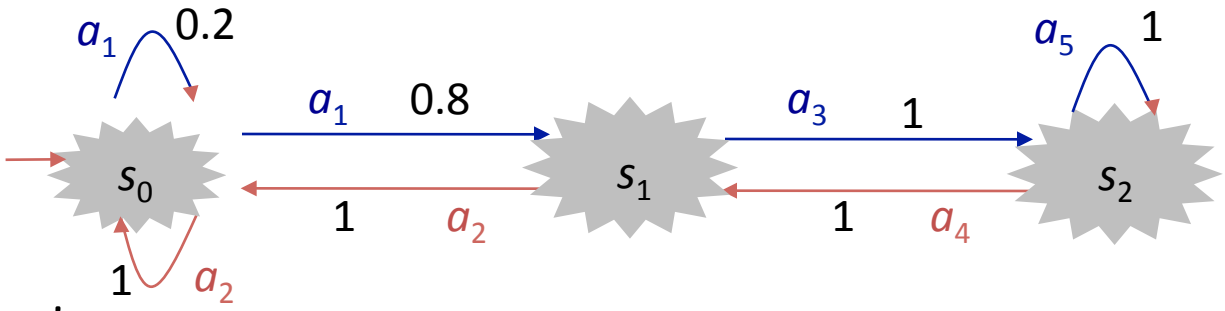


I. $\pi = \pi'$

II. Équations: $v_0=0+0.5*(1*v_0)$;
$v_1=0+0.5*(1*v_2)$;
$v_2=1+0.5*(1*v_2)$
Solution: $v_0=0$, $v_1=1$, $v_2=2$

III. $s_0 \rightarrow a_1$: $0+0.5(0.2*0+0.8*1)=0.4 > 0$; **change**
$s_1 \rightarrow a_2$: $0+0.5(1*0)=0 < 1$; ne change pas
$s_2 \rightarrow a_4$: $1+0.5(1*1)=1.5 < 2$; ne change pas
$\pi' = \{ s_0 \rightarrow a_1 , s_1 \rightarrow a_3 , s_2 \rightarrow a_5 \}$

Policy iteration: itération #3



I. $\pi = \pi'$

II. Équations: $v_0=0+0.5*(0.2*v_0+0.8*v_1)$;
$v_1=0+0.5*(1*v_2)$;
$v_2=1+0.5*(1*v_2)$
Solution: $v_0=4/9$, $v_1=1$, $v_2=2$

III. $s_0 \rightarrow a_2$: $0+0.5(1*0.4)=0.2 < 4/9$; ne change pas
$s_1 \rightarrow a_2$: $0+0.5(1*0.4)=0.2 < 1$; ne change pas
$s_2 \rightarrow a_4$: $1+0.5(1*1)=1.5 < 2$; ne change pas
$\pi' = \{ s_0 \rightarrow a_1 , s_1 \rightarrow a_3 , s_2 \rightarrow a_5 \}$, c-à-d. π

- Solution finale: π

Rappel: systèmes d'équations linéaires

- Soit le système d'équations:
  $v_0 = 0 + 0.5 * (0.2*v_0+0.8*v_1)$;
  $v_1 = 0 + 0.5 * (1*v_2)$;
  $v_2 = 1 + 0.5 * (1*v_2)$
- En mettant toutes les variables à droite, on peut l'écrire sous la forme:
  $0 = -0.9\ v_0 + 0.4\ v_1$ (1)
  $0 = -v_1 + 0.5\ v_2$ (2)
  $-1 = -0.5\ v_2$ (3)
- De l'équation (3), on conclut que $v_2 = -1 / -0.5 = 2$
- De l'équation (2), on conclut que $v_1 = 0.5\ v_2 = 1$
- De l'équation (1), on conclut que $v_0 = 0.4\ v_1 / 0.9 = 4/9$

Rappel: systèmes d'équations linéaires

- Soit le système d'équations:

  $v_0 = 0 + 0.5 * (0.2*v_0+0.8*v_1)$;

  $v_1 = 0 + 0.5 * (1*v_2)$;

  $v_2 = 1 + 0.5 * (1*v_2)$

- En mettant toutes les variables à droite, on peut l'écrire sous la forme:

  $0 = -0.9\ v_0 + 0.4\ v_1$ (1)

  $0 = -v_1 + 0.5\ v_2$ (2)

  $-1 = -0.5\ v_2$ (3)

- Approche alternative: on écrit sous forme matricielle b = A v, où

$$A = \begin{pmatrix} -0.9 & 0.4 & 0 \\ 0 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & -0.5 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

Rappel: systèmes d'équations linéaires

- Soit le système d'équations:

  $v_0 = 0 + 0.5 * (0.2*v_0+0.8*v_1)$;

  $v_1 = 0 + 0.5 * (1*v_2)$;

  $v_2 = 1 + 0.5 * (1*v_2)$

- En mettant toutes les variables à droite, on peut l'écrire sous la forme:

  $0 = -0.9\ v_0 + 0.4\ v_1$ (1)

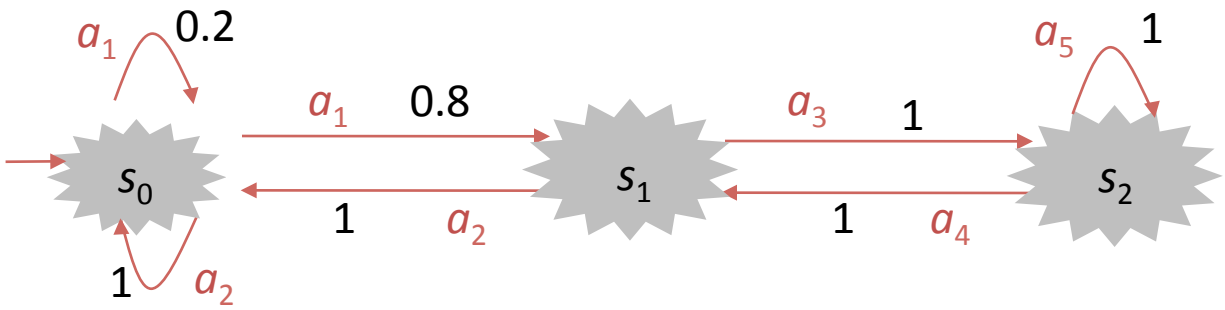
  $0 = -v_1 + 0.5\ v_2$ (2)

  $-1 = -0.5\ v_2$ (3)

- Suffit alors d'inverser A pour obtenir $v = A^{-1} b$
  - on peut utiliser une librairie d'algèbre linéaire (ex.: Numpy en Python):

```
>>> A = numpy.array([[-0.9,0.4,0],[0,-1,0.5],[0,0,-0.5]])
>>> b = numpy.array([0,0,-1])
>>> Ainv = numpy.linalg.inv(A)
>>> v = numpy.dot(Ainv,b)
>>> print v
[ 0.44444444  1.          2.        ]
```

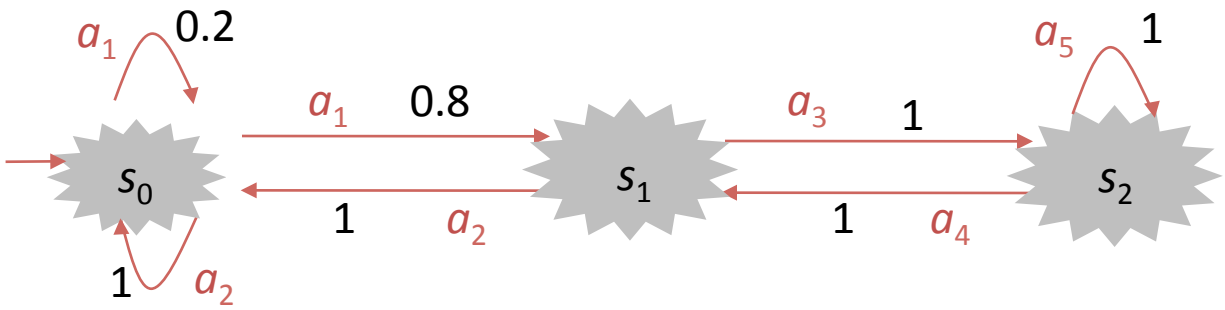
Value iteration: initialisation



- Valeurs initiales fixées à 0:

$v_0 = 0$
$v_1 = 0$
$v_2 = 0$

Value iteration: itération #1

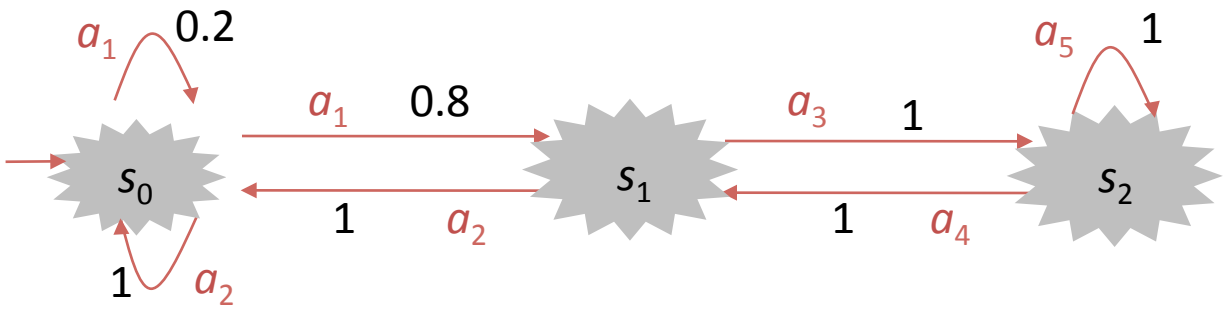


- Mise à jour droite-gauche des valeurs

$v_0 \leftarrow 0 + 0.5 \max\{ 0.2\, v_0 + 0.8\, v_1, v_0 \} = 0 + 0.5 \max\{ 0, 0 \} = 0$
$v_1 \leftarrow 0 + 0.5 \max\{ v_0, v_2 \} = 0 + 0.5 \max\{ 0, 0 \} = 0$
$v_2 \leftarrow 1 + 0.5 \max\{ v_1, v_2 \} = 1 + 0.5 \max\{ 0, 0 \} = 1$

- Les nouvelles valeurs sont $v_0 = 0$, $v_1 = 0$, $v_2 = 1$

Value iteration: itération #2

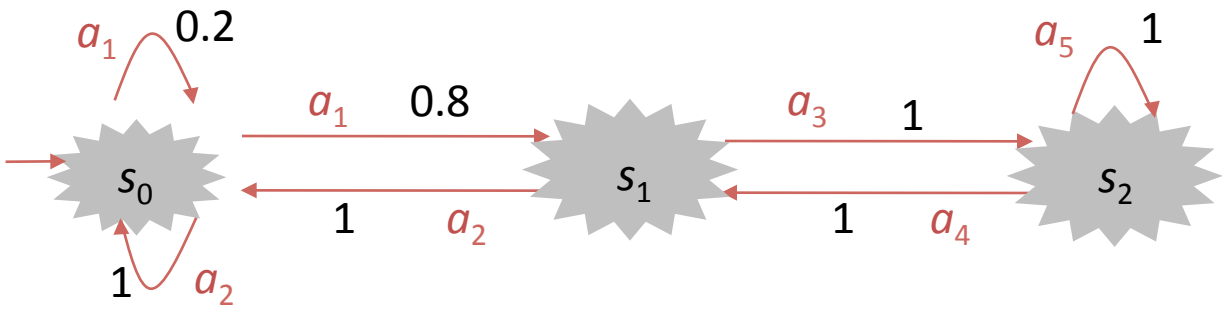


- Mise à jour droite-gauche des valeurs

$v_0 \leftarrow 0 + 0.5 \max\{ 0.2\, v_0 + 0.8\, v_1, v_0 \} = 0 + 0.5 \max\{ 0, 0 \} = 0$
$v_1 \leftarrow 0 + 0.5 \max\{ v_0, v_2 \} = 0 + 0.5 \max\{ 0, 1 \} = 0.5$
$v_2 \leftarrow 1 + 0.5 \max\{ v_1, v_2 \} = 1 + 0.5 \max\{ 0, 1 \} = 1.5$

- Les nouvelles valeurs sont $v_0 = 0$, $v_1 = 0.5$, $v_2 = 1.5$

Value iteration: itération #3

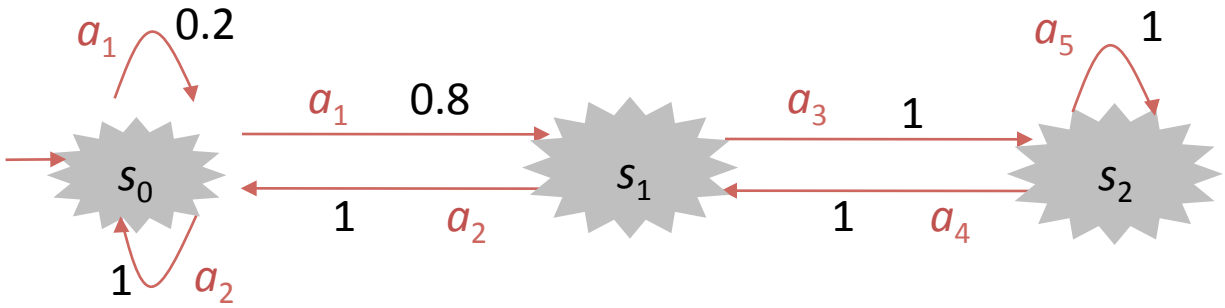


- Mise à jour droite-gauche des valeurs

  $v_0 \leftarrow 0 + 0.5 \max\{ 0.2\ v_0 + 0.8\ v_1, v_0 \} = 0 + 0.5 \max\{ 0.8 * 0.5, 0 \} = 0.2$
  $v_1 \leftarrow 0 + 0.5 \max\{ v_0, v_2 \} = 0 + 0.5 \max\{ 0, 1.5 \} = 0.75$
  $v_2 \leftarrow 1 + 0.5 \max\{ v_1, v_2 \} = 1 + 0.5 \max\{ 0.5, 1.5 \} = 1.75$

- Les nouvelles valeurs sont $v_0 = 0.2$, $v_1 = 0.75$, $v_2 = 1.75$

Value iteration: itération #3



- Si on arrêtait à la 3e itération, le plan retourné serait

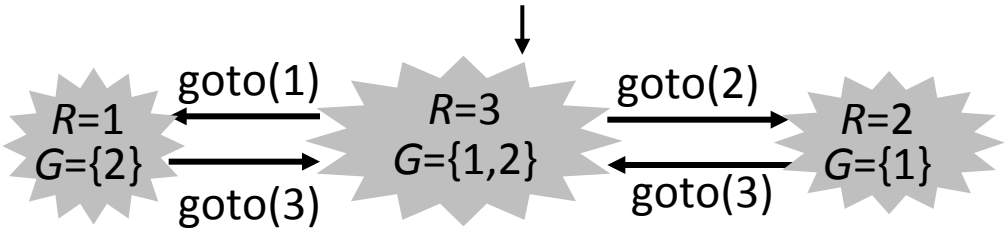
$\pi(s_0) = \text{argmax}\{ 0.2\ v_0 + 0.8\ v_1,\ v_0 \} = \text{argmax}\{ 0.2*0.2+0.8*0.75,\ 0.2\} = a_1$

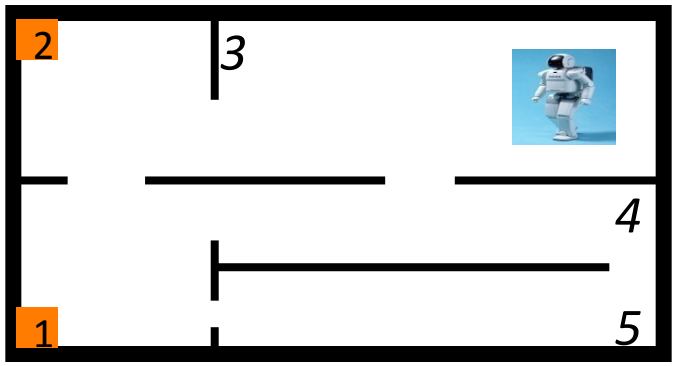
$\pi(s_1) = \text{argmax}\{ v_0,\ v_2 \} = \text{argmax}\{ 0.2,\ 1.75 \} = a_3$

$\pi(s_2) = \text{argmax}\{ v_1,\ v_2 \} = \text{argmax}\{ 0.75,\ 1.75 \} = a_5$

- Même si les valeurs n'ont pas tout à fait convergé, on a déjà le plan optimal
  - ça aurait pu ne pas être le cas, seulement garanti si on boucle infiniment

Fonctions de récompenses complexes





- Notons:
  - $R = i$ le fait que le robot est dans le local numéro i
  - $G=\{i,..,k\}$ le but spécifiant que le robot doit visiter les locaux $\{1, \ldots, k\}$
- Ainsi $G=\{1,2\}$ signifie que le robot doit visiter le local 1 (c-à-d., $R=1$) **et** visiter le local 2 (c-à-d., $R=2$)
- Ce genre de but nécessite d'étendre au préalable l'espace d'états de manière à attribuer des récompenses à des comportements (pas seulement à un état)
- Une façon élégante de le faire est d'attribuer les récompenses à des formules de logique temporelle satisfaisant les comportements désirés [Thiébaux et al., JAIR 2006]

Un peu plus loin …

- Les algorithmes *value-iteration* et *policy-iteration* sont lents sur des grands espaces d'état
  - Améliorations:
    - *Real-Time Dynamic Programming* (RTPD)
    - *Labeled RTDP*
- Les MDP supposent une observation complète
  - *Partially Observable MDP* (PoMDP)
- Les MDP sont limités à des décisions séquentielles
  - pour des actions simultanées:
    - *Concurrent MDP* (CoMPD)
    - *Concurrent Probabilistic Temporal Planning* (CPTP)

Résumé

- L'approche Markovienne est très attrayante parce qu'elle combine raisonnement probabiliste et optimisation avec élégance

- C'est une des approches les plus étudiées actuellement pour:
  - la planification (cours IFT 702)
  - l'apprentissage par renforcement (qu'on verra bientôt)

- Elle est notamment populaire dans les applications de robots mobiles