Apprentissage automatique

Concepts fondamentaux - décomposition en valeurs propres

Vecteurs et Valeurs Propres

Sujets: vecteurs et valeurs propres

- Soit $\mathbf{A}$ une matrice carrée $M \times M$
- Les **vecteurs propres** $\mathbf{u}_i$ (i=1,...,M) sont ceux qui satisfont

$$\mathbf{A}\mathbf{u}_i = \lambda_i \mathbf{u}_i$$

où λ_i est la **valeur propre** associée au vecteur $\mathbf{u}_i$

- De plus, les vecteurs sont orthonormaux :

$\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\ \mathbf{u}_i = 1$ et $\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\ \mathbf{u}_j = 0$ si $i \neq j$

DÉCOMPOSITION EN VALEURS PROPRES

Sujets: vecteurs et valeurs propres

- On va s'intéresser surtout au cas où $\mathbf{A}$ est une matrice symétrique
- Dans ce cas, on peut l'écrire (**décomposer**) comme suit :

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}$$

- Il existe plusieurs librairies permettant de trouver les valeurs et vecteurs propres numériquement

DÉCOMPOSITION EN VALEURS PROPRES

Sujets: vecteurs et valeurs propres

- On va s'intéresser surtout au cas où $\mathbf{A}$ est une matrice symétrique
- Dans ce cas, on peut l'écrire (**décomposer**) comme suit :

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}$$

où les colonnes de $\mathbf{U}$ sont les vecteurs propres $\mathbf{u}_i$ et $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice diagonale où les λ_i sont sur sa diagonale

PROPRIÉTÉS

Sujets: propriété du déterminant

- La décomposition en valeurs propres est souvent plus facile à manipuler, grâce à ses propriétés

  - Le déterminant d'une matrice symétrique est le produit de ses valeurs propres :

$$|\mathbf{A}| = \prod_{i=1}^{M} \lambda_i$$

PROPRIÉTÉS

Sujets: propriété de la trace

- La décomposition en valeurs propres est souvent plus facile à manipuler, grâce à ses propriétés
  - La trace d'une matrice symétrique est la somme de ses valeurs propres :

$$\mathrm{Tr}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i$$

PROPRIÉTÉS

Sujets: propriété du rang

- La décomposition en valeurs propres est souvent plus facile à manipuler, grâce à ses propriétés

  - Le rang d'une matrice symétrique est le nombre de valeurs propres non nulles :

$$\mathrm{rang}(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^{M} \mathbb{1}(\lambda_i \neq 0)$$

PROPRIÉTÉS

Sujets: propriété de l'inverse

- La décomposition en valeurs propres est souvent plus facile à manipuler, grâce à ses propriétés

  - L'inverse d'une matrice symétrique peut s'écrire comme suit :

$$\mathbf{A}^{-1} = \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}$$

(en fait, c'est sa décomposition en valeurs propres)

MATRICE DÉFINIE POSITIVE

Sujets: matrice définie positive

- On dit qu'une matrice est **définie positive** si, pour tout vecteur $\mathbf{w}$ non nul, on a que

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{w} > 0$$

- On note alors $\mathbf{A} \succ 0$

Matrice Définie Positive

Sujets: matrice définie positive

semi-

- On dit qu'une matrice est **définie positive** si, pour tout vecteur $\mathbf{w}$ non nul, on a que

$$\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{w} \geqslant 0$$

- On note alors $\mathbf{A} \succeq 0$

Propriétés

Sujets: propriété d'une matrice définie positive

- La décomposition en valeurs propres est souvent plus facile à manipuler, grâce à ses propriétés
  - Une matrice est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives :

$$\lambda_i > 0 \quad \text{pour } i{=}1,\ldots,M$$

PROPRIÉTÉS

Sujets: propriété d'une matrice définie positive

- La décomposition en valeurs propres est souvent plus facile à manipuler, grâce à ses propriétés

semi-

- Une matrice est définie positive si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives :

$$\lambda_i \geqslant 0 \quad \text{pour } i = 1, \ldots, M$$