Apprentissage automatique

Formulation probabiliste - loi gaussienne / normale (2)

LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- La version multidimensionnelle a une forme similaire

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})\right\}$$

  - paramétrée par sa moyenne μ et sa matrice de covariance Σ

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \boldsymbol{\mu} \qquad \mathrm{cov}[\mathbf{x}] = \boldsymbol{\Sigma}$$

  - Σ permet de représenter des dépendances entre les élément de x

LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- La version multidimensionnelle a une forme similaire

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}_{\Delta^2} \right\}$$

distance de Mahalanobis

  - paramétrée par sa moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et sa matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \boldsymbol{\mu} \qquad \operatorname{cov}[\mathbf{x}] = \boldsymbol{\Sigma}$$

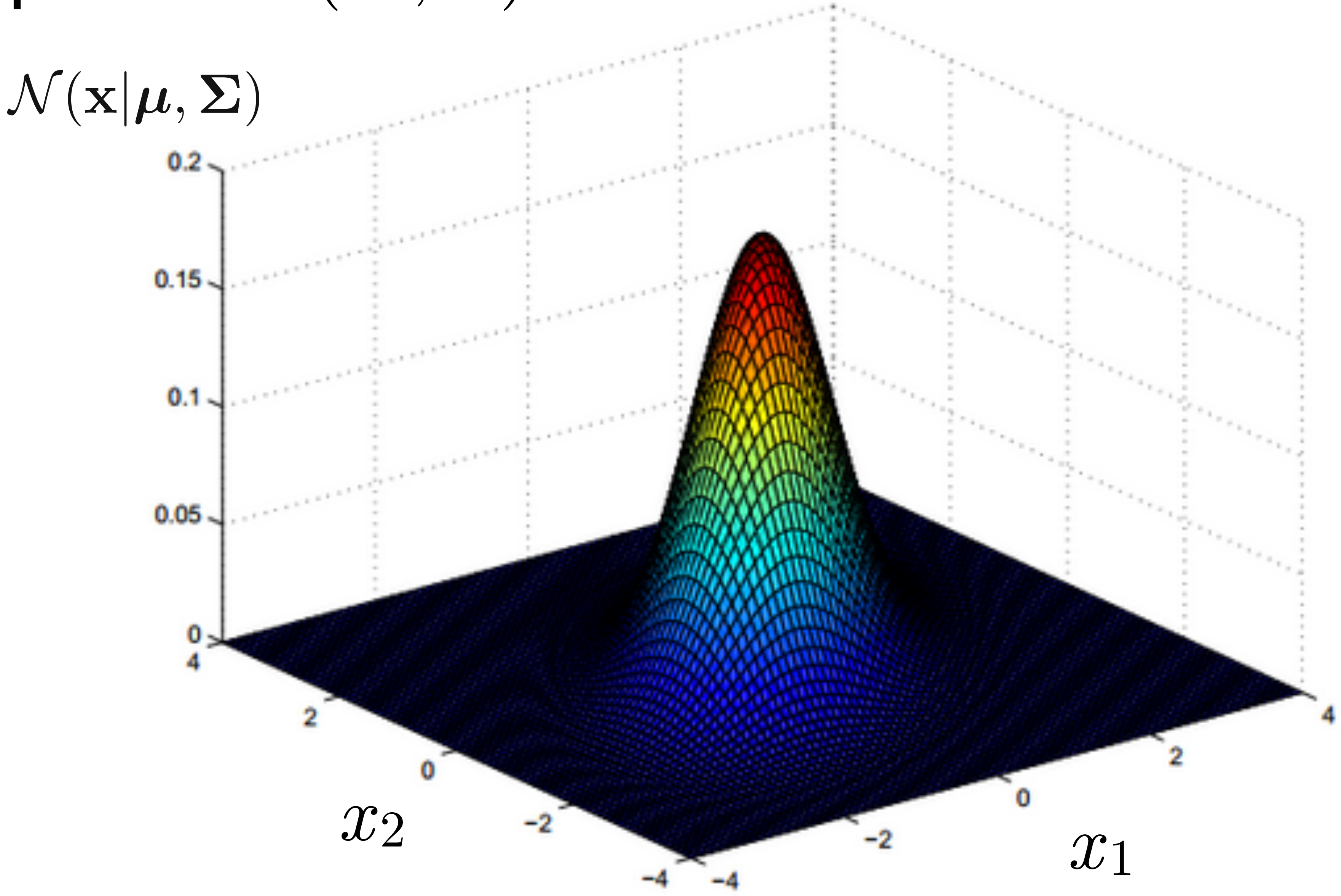
  - $\boldsymbol{\Sigma}$ permet de représenter des dépendances entre les élément de $\mathbf{x}$

LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$



LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

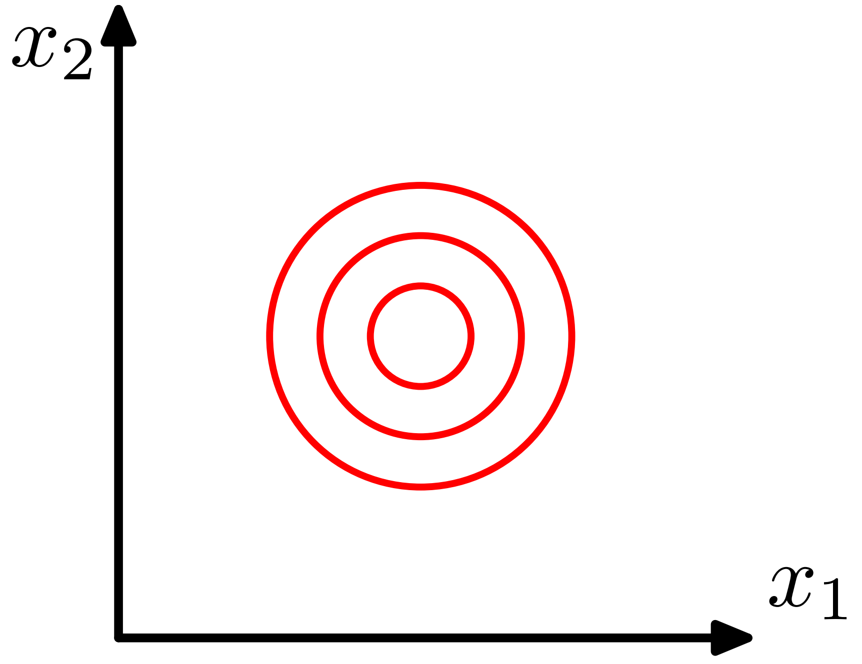
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$



LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

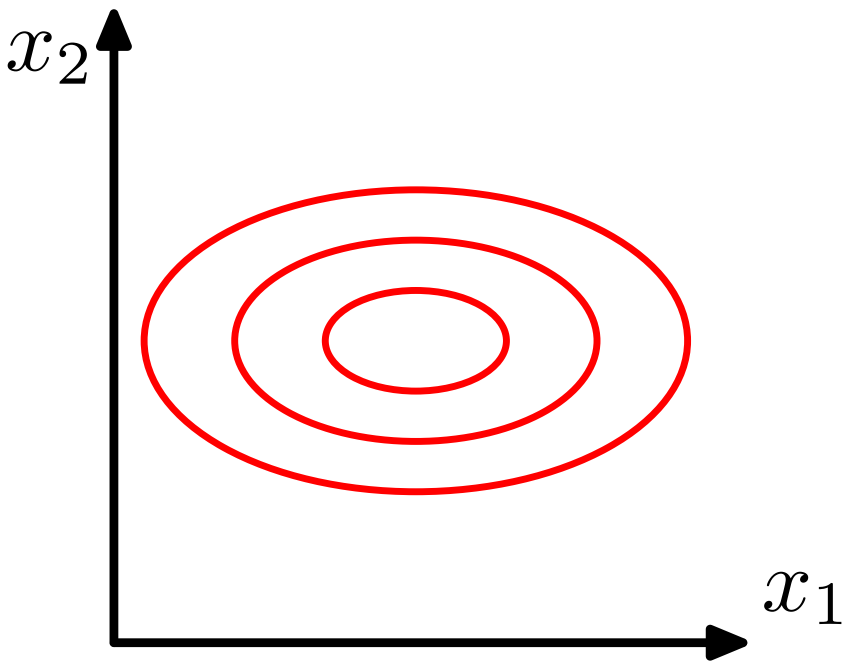
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$



LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

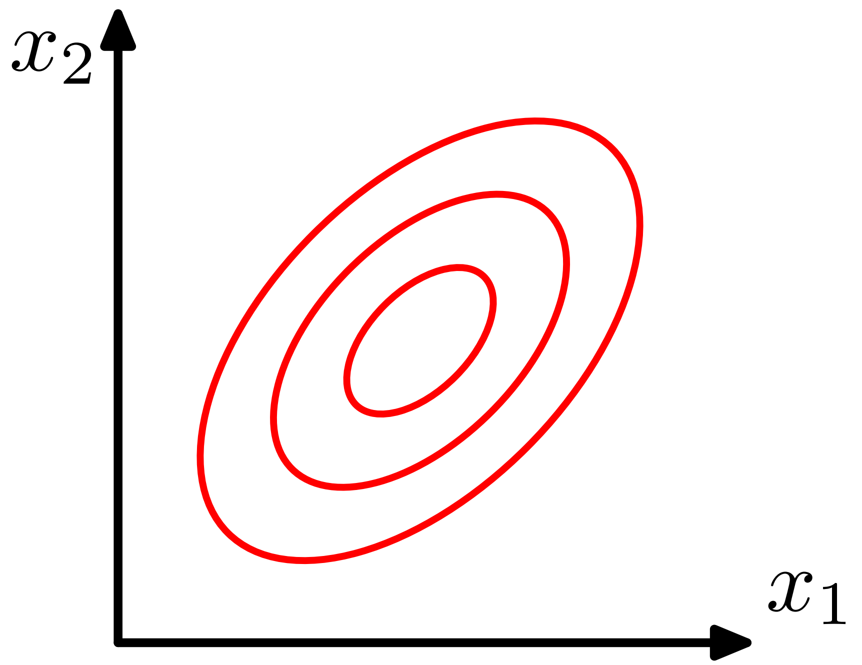
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$



DÉCOMPOSITION EN VALEURS PROPRES

Sujets: vecteurs et valeurs propres

RAPPEL

- On va s'intéresser surtout au cas où $\mathbf{A}$ est une matrice symétrique
- Dans ce cas, on peut l'écrire (**décomposer**) comme suit :

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}$$

- Il existe plusieurs librairies permettant de trouver les valeurs et vecteurs propres numériquement

DÉCOMPOSITION EN VALEURS PROPRES

Sujets: vecteurs et valeurs propres

RAPPEL

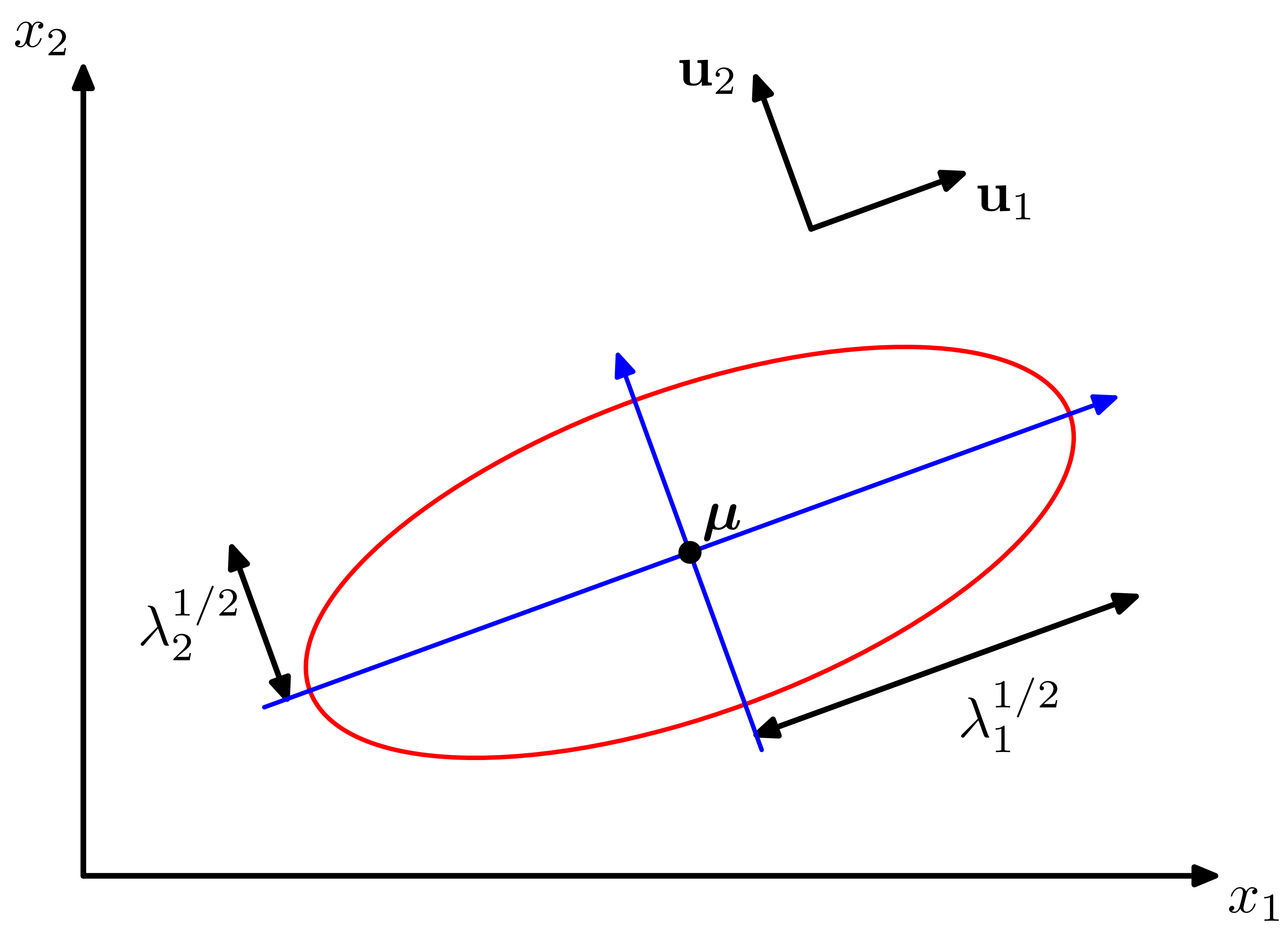
- On va s'intéresser surtout au cas où $\mathbf{A}$ est une matrice symétrique
- Dans ce cas, on peut l'écrire (**décomposer**) comme suit :

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{i=1}^{M} \lambda_i \mathbf{u}_i \mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}$$

- Il existe plusieurs librairies permettant de trouver les valeurs et vecteurs propres numériquement

LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

Sujets: lien entre vecteurs et valeurs propres et forme de la gaussienne



Loi de Probabilité Gaussienne

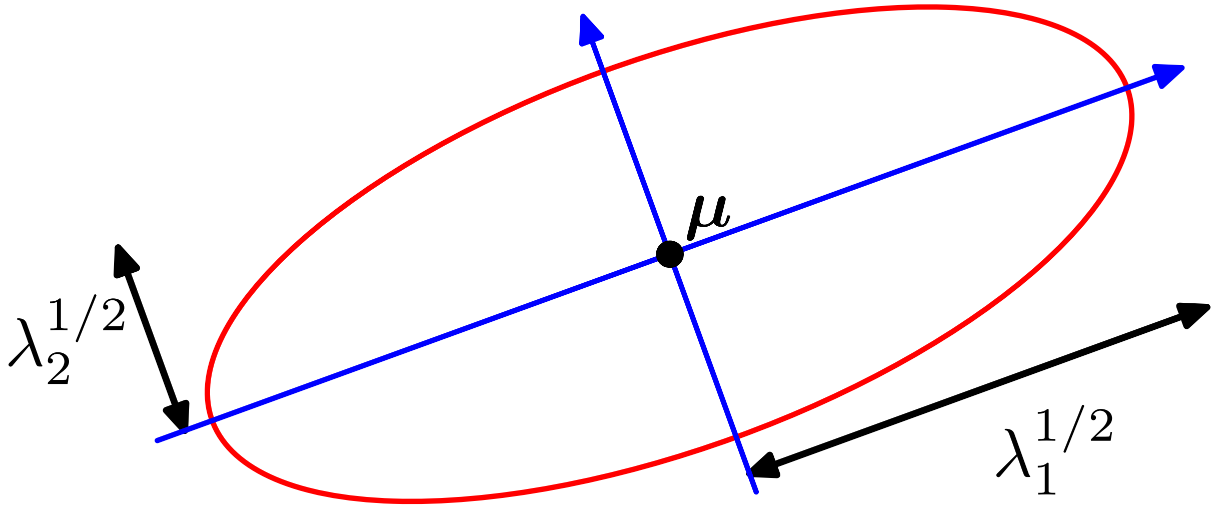
Sujets: lien entre vecteurs et valeurs propres et forme de la gaussienne

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= (\mathbf{x}-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu) \\ &= (\mathbf{x}-\mu)^{\mathrm{T}}\left(\sum_i \frac{1}{\lambda_i}\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\right)(\mathbf{x}-\mu) \\ &= \sum_i \frac{\left((\mathbf{x}-\mu)^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_i\right)^2}{\lambda_i} = \sum_i \left(\frac{(\mathbf{x}-\mu)^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_i}{\lambda_i^{1/2}}\right)^2\end{aligned}$$

Loi de probabilité gaussienne

Sujets: lien entre vecteurs et valeurs propres et forme de la gaussienne

$$\Delta^2 = (\mathbf{x}-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\mu)$$
$$= (\mathbf{x}-\mu)^{\mathrm{T}}\left(\sum_i \frac{1}{\lambda_i}\mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^{\mathrm{T}}\right)(\mathbf{x}-\mu)$$
$$= \sum_i \frac{\left((\mathbf{x}-\mu)^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_i\right)^2}{\lambda_i} = \sum_i \left(\frac{(\mathbf{x}-\mu)^{\mathrm{T}}\mathbf{u}_i}{\lambda_i^{1/2}}\right)^2$$



Loi de probabilité gaussienne

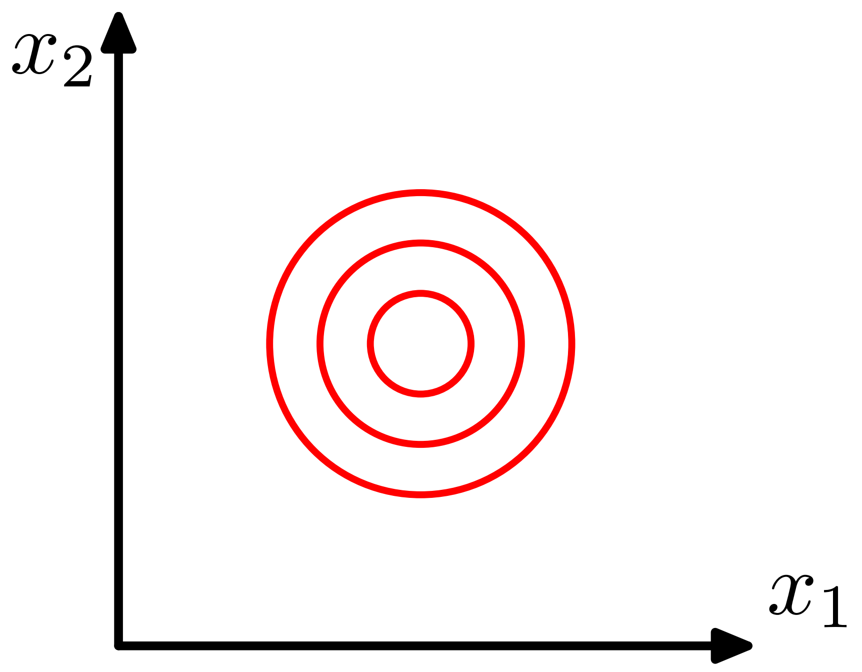
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right)$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$



Loi de Probabilité Gaussienne

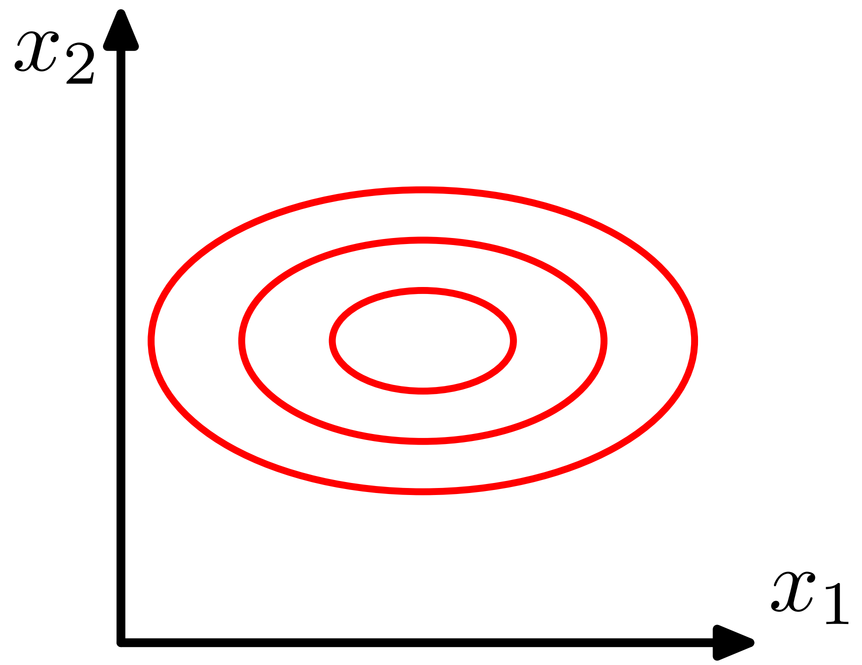
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \mathbf{\Sigma})$



Loi de Probabilité Gaussienne

Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\mathbf{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$