Apprentissage automatique

Formulation probabiliste - loi marginale d'une gaussienne

LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- La version multidimensionnelle a une forme similaire

$$p(\mathbf{x}) = \mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{D/2}} \frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}|^{1/2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \underbrace{(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}_{\Delta^2} \right\}$$

distance de Mahalanobis

  - paramétrée par sa moyenne $\boldsymbol{\mu}$ et sa matrice de covariance $\boldsymbol{\Sigma}$

$$\mathbb{E}[\mathbf{x}] = \boldsymbol{\mu} \qquad \operatorname{cov}[\mathbf{x}] = \boldsymbol{\Sigma}$$

  - $\boldsymbol{\Sigma}$ permet de représenter des dépendances entre les élément de $\mathbf{x}$

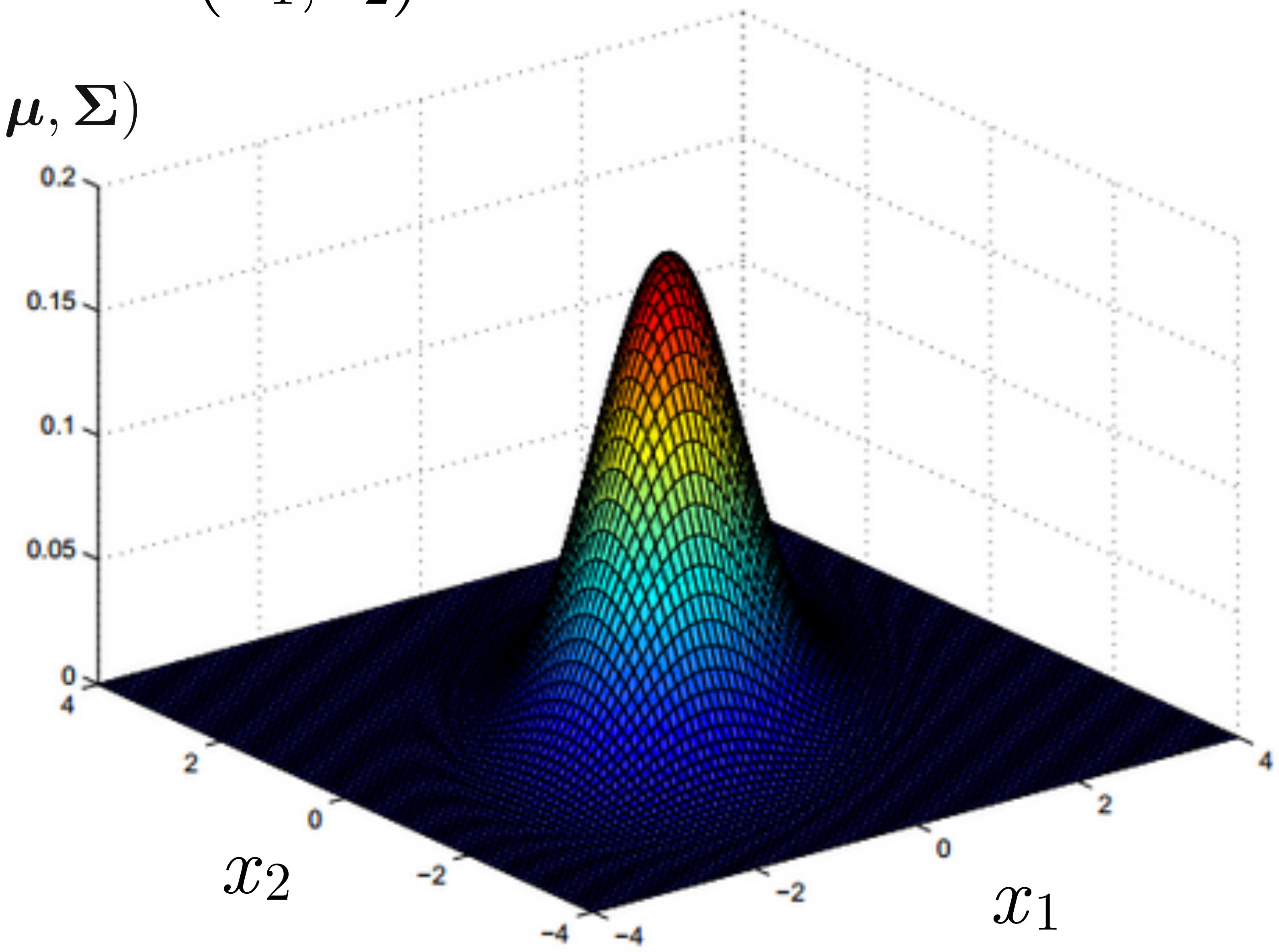
LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$



THÉORIE DES PROBABILITÉS

Sujets: fonction de densité marginale et conditionnelle

RAPPEL

- Soit X et Y deux **variables aléatoires continues**
  - la **fonction de densité marginale** s'obtient en intégrant l'autre variable :

$$p(x) = \int p(x,y)\mathrm{d}y$$

  - la **fonction de densité conditionnelle** s'obtient en divisant par la marginale :

$$p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p(x)}$$

Théorie des Probabilités

Sujets: fonction de densité marginale et conditionnelle

RAPPEL

- Soit X et Y deux **variables aléatoires continues**
  - la **fonction de densité marginale** s'obtient en intégrant l'autre variable :

$$p(x) = \int p(x, y) \mathrm{d}y$$

  - la **fonction de densité conditionnelle** s'obtient en divisant par la marginale :

$$p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}$$

LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

Sujets: loi marginale d'une gaussienne

- Soit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b)^{\mathrm{T}}$ une variable aléatoire gaussienne, de moyenne et matrice de covariance

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_a \\ \boldsymbol{\mu}_b \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{aa} & \boldsymbol{\Sigma}_{ab} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{ba} & \boldsymbol{\Sigma}_{bb} \end{pmatrix}$$

- La **loi marginale** $p(\mathbf{x}_a) = \int p(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b)\, \mathrm{d}\mathbf{x}_b$ est également gaussienne et est égale à

$$p(\mathbf{x}_a) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_a | \boldsymbol{\mu}_a, \boldsymbol{\Sigma}_{aa})$$

Loi de probabilité gaussienne

Sujets: loi marginale d'une gaussienne

- Soit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b)^{\mathrm{T}}$ une variable aléatoire gaussienne, de moyenne et matrice de covariance

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_a \\ \boldsymbol{\mu}_b \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{array}{c} \mathrm{cov}[\mathbf{x}_a] \qquad \mathrm{cov}[\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b] \\ \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{aa} & \boldsymbol{\Sigma}_{ab} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{ba} & \boldsymbol{\Sigma}_{bb} \end{pmatrix} \\ \qquad\qquad \mathrm{cov}[\mathbf{x}_b] \end{array}$$

- La **loi marginale** $p(\mathbf{x}_a) = \int p(\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b)\, \mathrm{d}\mathbf{x}_b$ est également gaussienne et est égale à

$$p(\mathbf{x}_a) = \mathcal{N}(\mathbf{x}_a | \boldsymbol{\mu}_a, \boldsymbol{\Sigma}_{aa})$$

LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

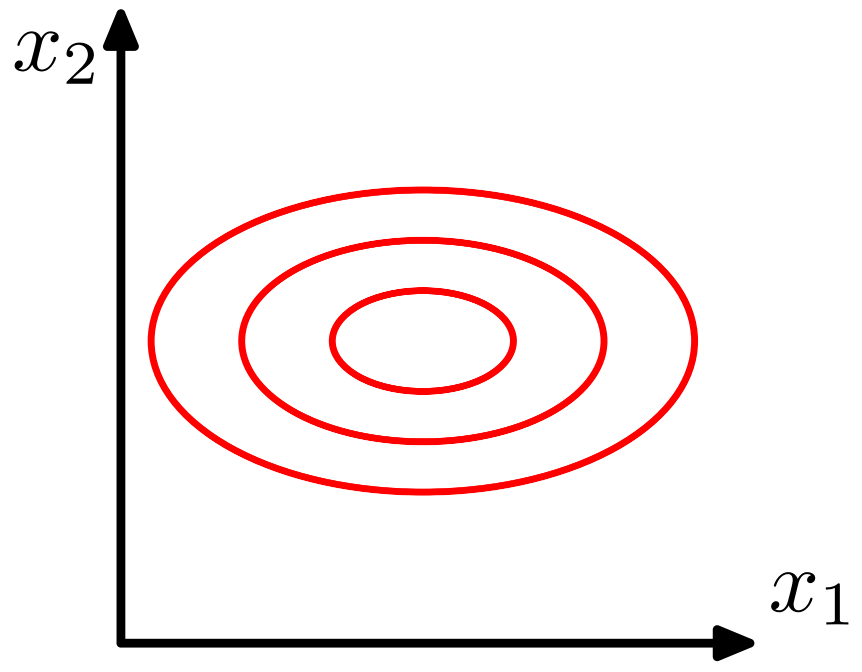
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$



LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

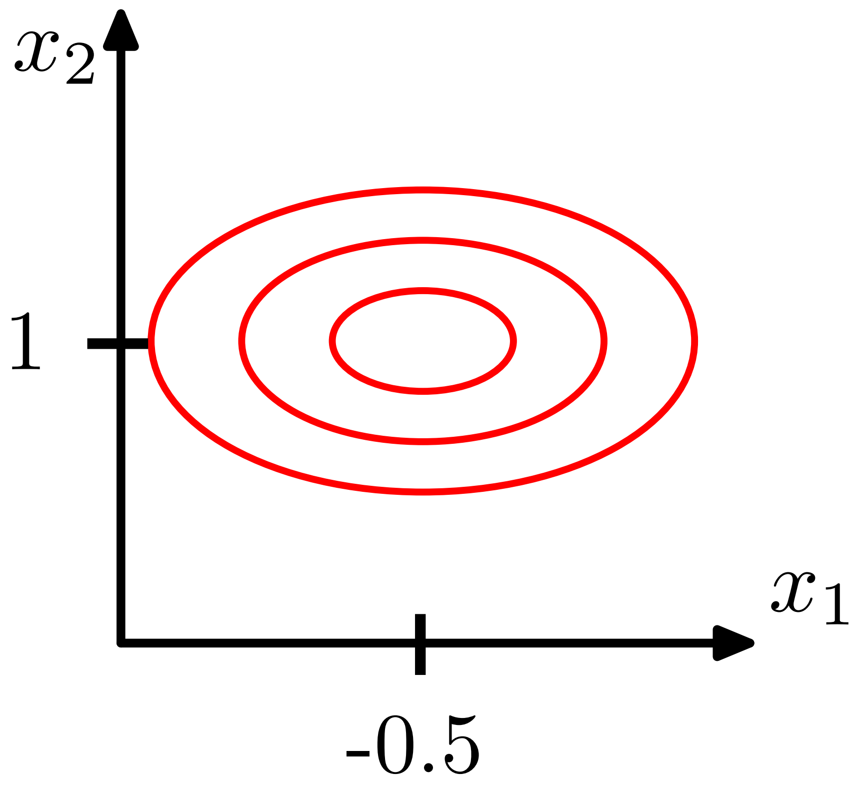
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$



HUGO LAROCHELLE

LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

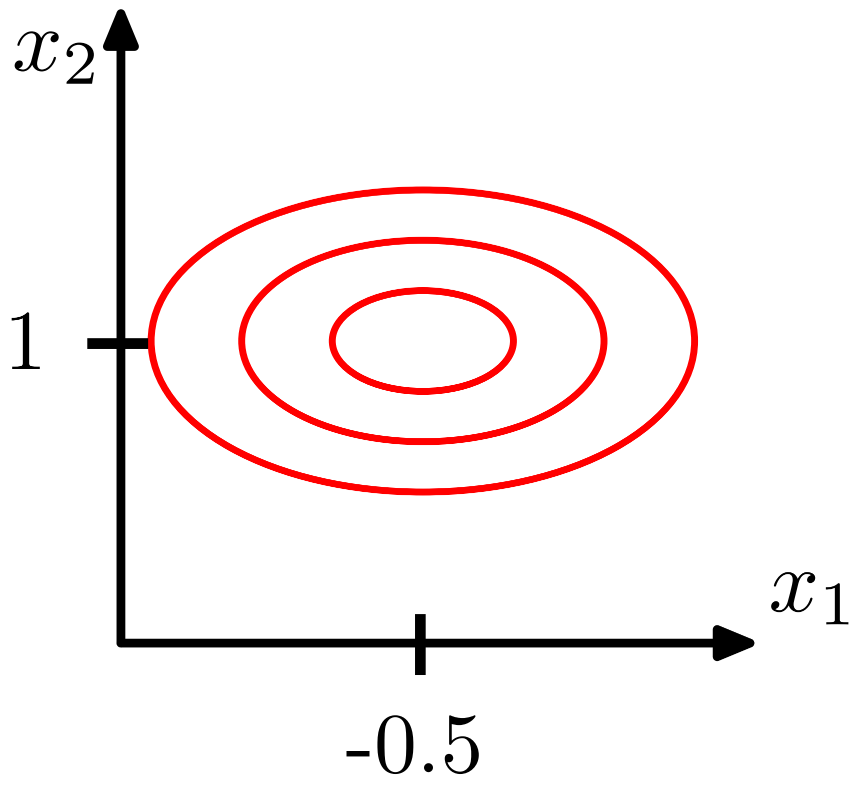
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$



$$p(x_1) = \mathcal{N}(x_1 | -0.5, 2)$$

Loi de probabilité gaussienne

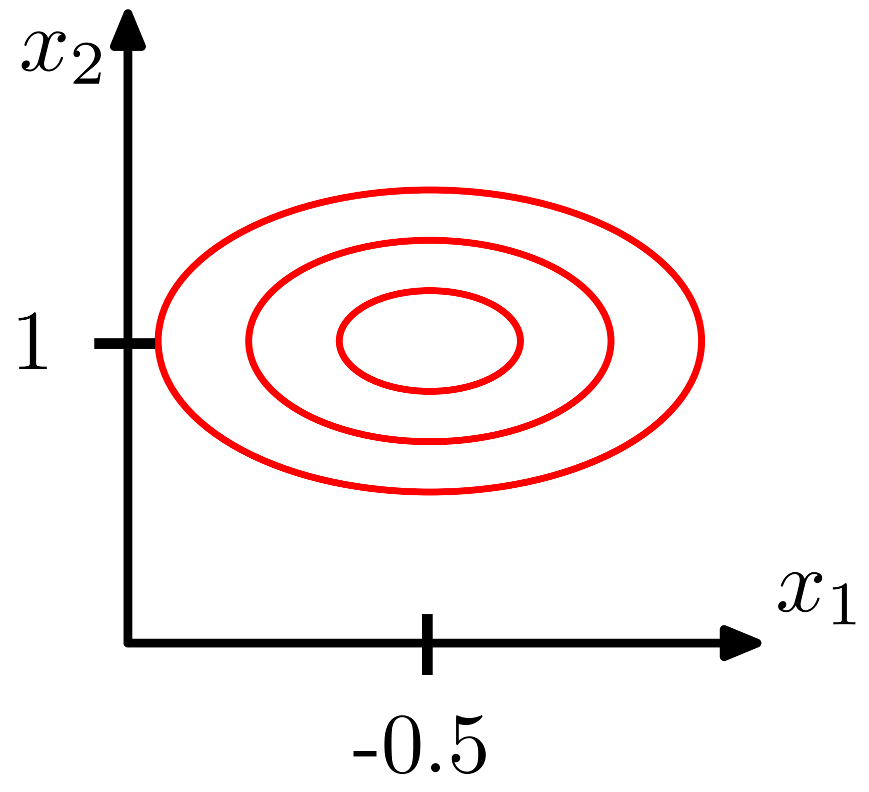
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$



$$p(x_1) = \mathcal{N}(x_1 | -0.5, 2)$$

$$p(x_2) = \mathcal{N}(x_2 | 1, 1)$$

LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

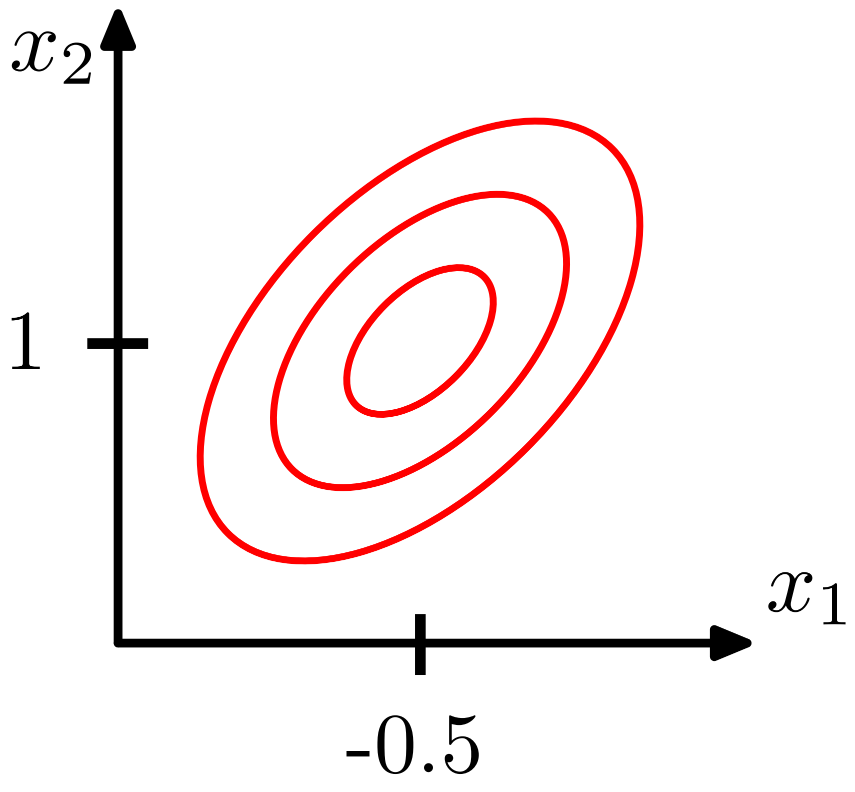
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$



HUGO LAROCHELLE

LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

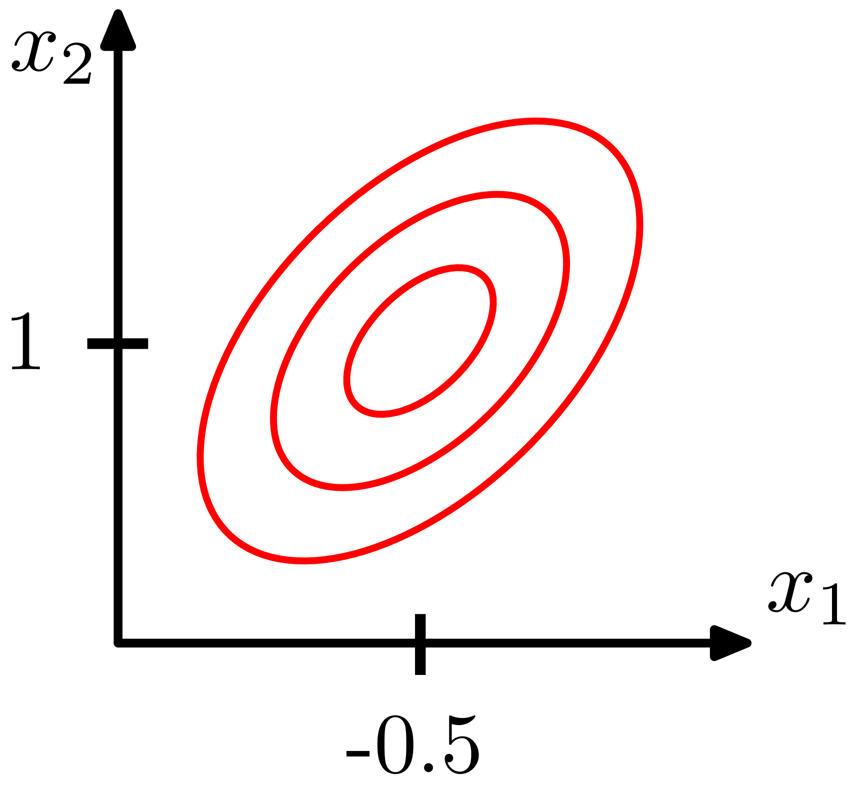
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$



$$p(x_1) = \mathcal{N}(x_1 | -0.5, 1.5)$$

LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

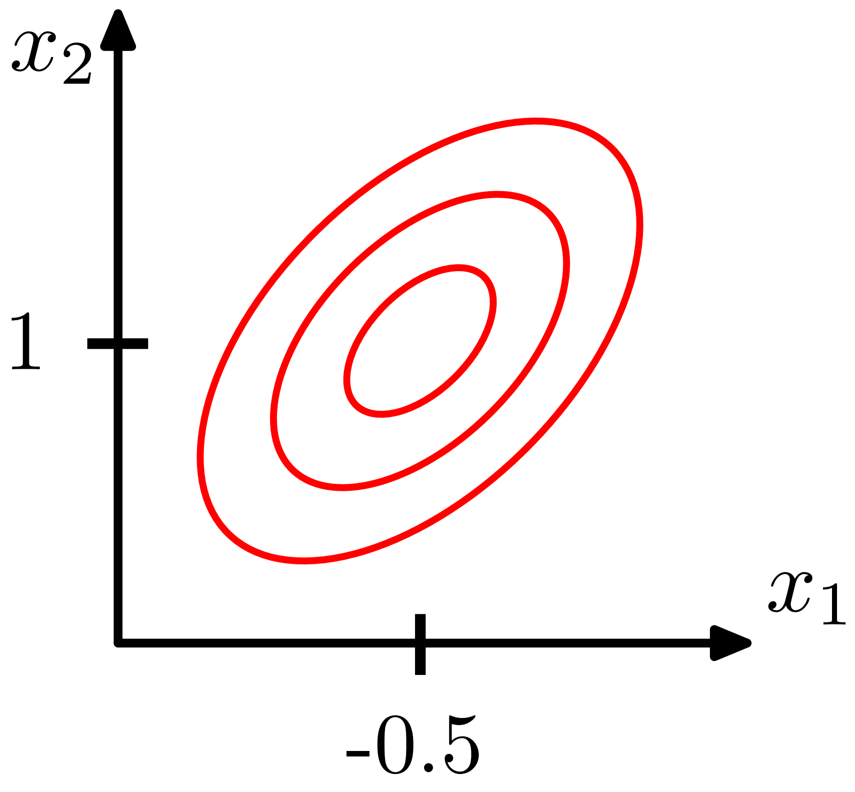
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

RAPPEL

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$



$$p(x_1) = \mathcal{N}(x_1| -0.5, 1.5)$$

$$p(x_2) = \mathcal{N}(x_2|1, 1.5)$$

Apprentissage automatique

Formulation probabiliste - loi conditionnelle d’une gaussienne

THÉORIE DES PROBABILITÉS

Sujets: fonction de densité marginale et conditionnelle

RAPPEL

- Soit X et Y deux **variables aléatoires continues**
  - la **fonction de densité marginale** s'obtient en intégrant l'autre variable :

$$p(x) = \int p(x,y)\mathrm{d}y$$

  - la **fonction de densité conditionnelle** s'obtient en divisant par la marginale :

$$p(y|x) = \frac{p(x,y)}{p(x)}$$

Théorie des Probabilités

Sujets: fonction de densité marginale et conditionnelle

RAPPEL

- Soit X et Y deux **variables aléatoires continues**
  - la **fonction de densité marginale** s'obtient en intégrant l'autre variable :

$$p(x) = \int p(x, y) \mathrm{d}y$$

  - la **fonction de densité conditionnelle** s'obtient en divisant par la marginale :

$$p(y|x) = \frac{p(x, y)}{p(x)}$$

Loi de Probabilité Gaussienne

Sujets: loi conditionnelle d'une gaussienne

- Soit $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b)^{\mathrm{T}}$ une variable aléatoire gaussienne, de moyenne et matrice de covariance

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}_a \\ \boldsymbol{\mu}_b \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{aa} & \boldsymbol{\Sigma}_{ab} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{ba} & \boldsymbol{\Sigma}_{bb} \end{pmatrix}$$

- La **loi conditionnelle** $p(\mathbf{x}_a | \mathbf{x}_b)$ est aussi gaussienne :

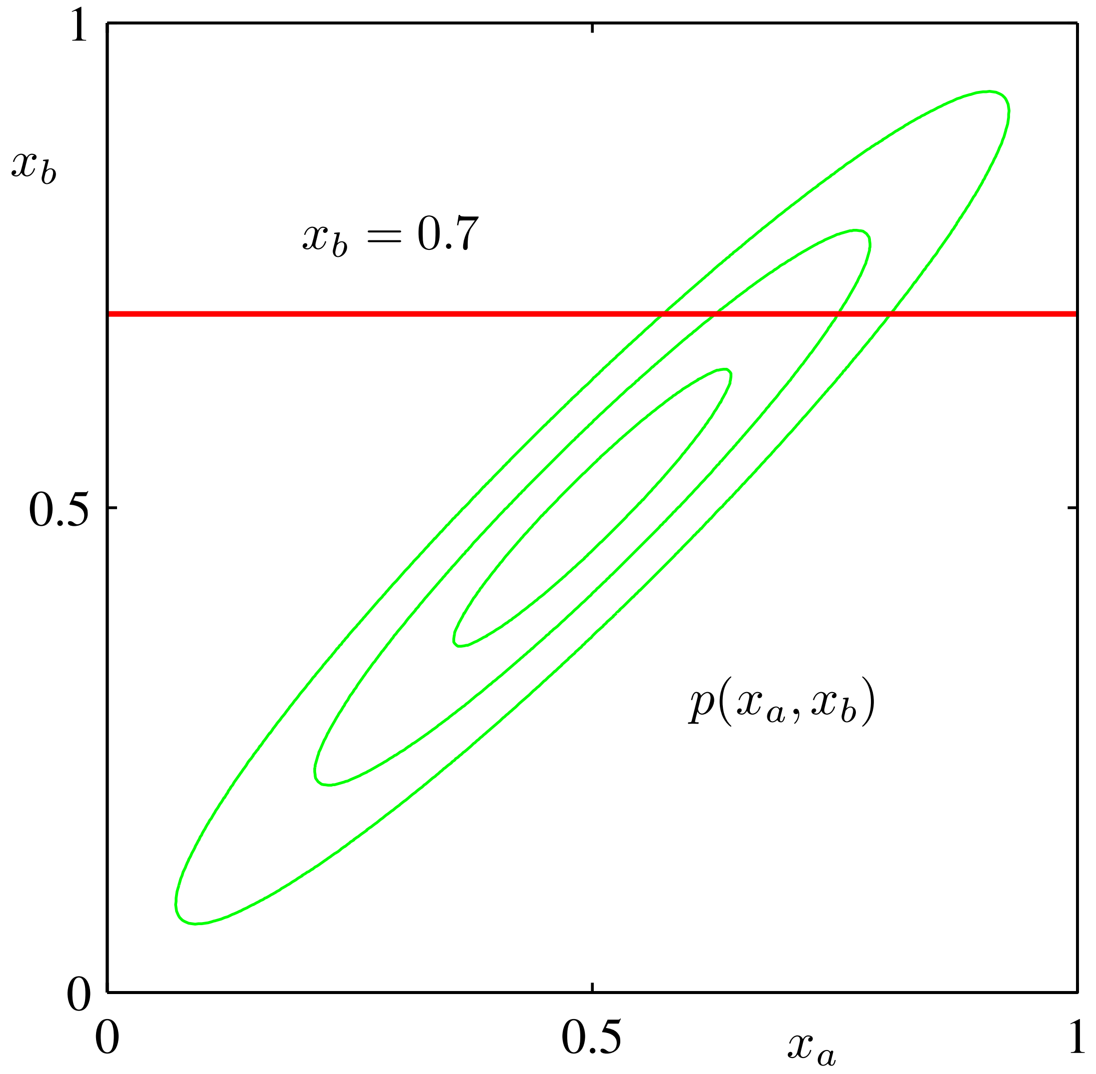
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{a|b} &= \boldsymbol{\mu}_a + \boldsymbol{\Sigma}_{ab}\boldsymbol{\Sigma}_{bb}^{-1}(\mathbf{x}_b - \boldsymbol{\mu}_b) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{a|b} &= \boldsymbol{\Sigma}_{aa} - \boldsymbol{\Sigma}_{ab}\boldsymbol{\Sigma}_{bb}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ba} \end{aligned}$$

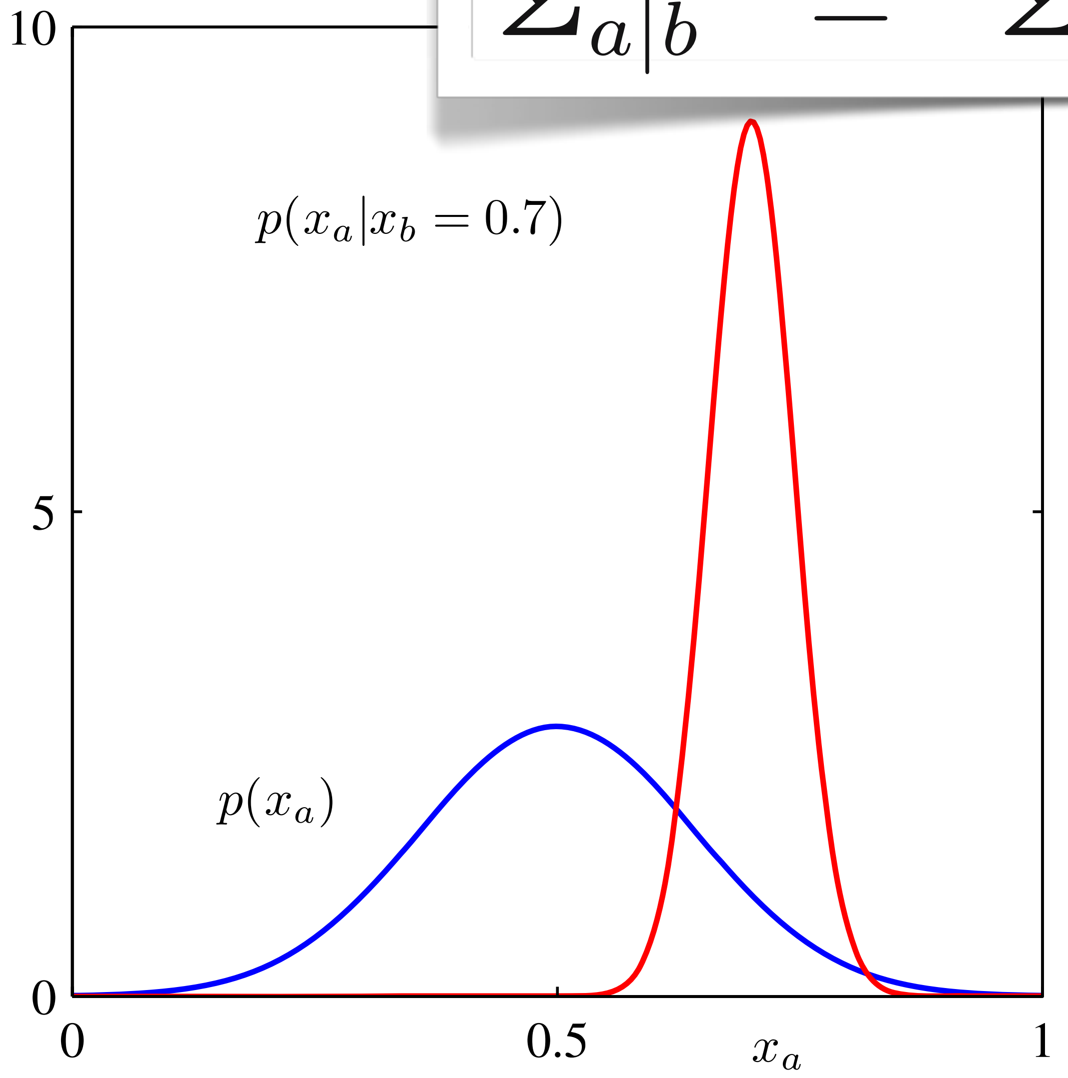
LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

Sujets: loi conditionnelle d'une gaussienne

- Exemple

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{a|b} &= \boldsymbol{\mu}_a + \boldsymbol{\Sigma}_{ab}\boldsymbol{\Sigma}_{bb}^{-1}(\mathbf{x}_b - \boldsymbol{\mu}_b) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{a|b} &= \boldsymbol{\Sigma}_{aa} - \boldsymbol{\Sigma}_{ab}\boldsymbol{\Sigma}_{bb}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ba}\end{aligned}$$





Loi de probabilité gaussienne

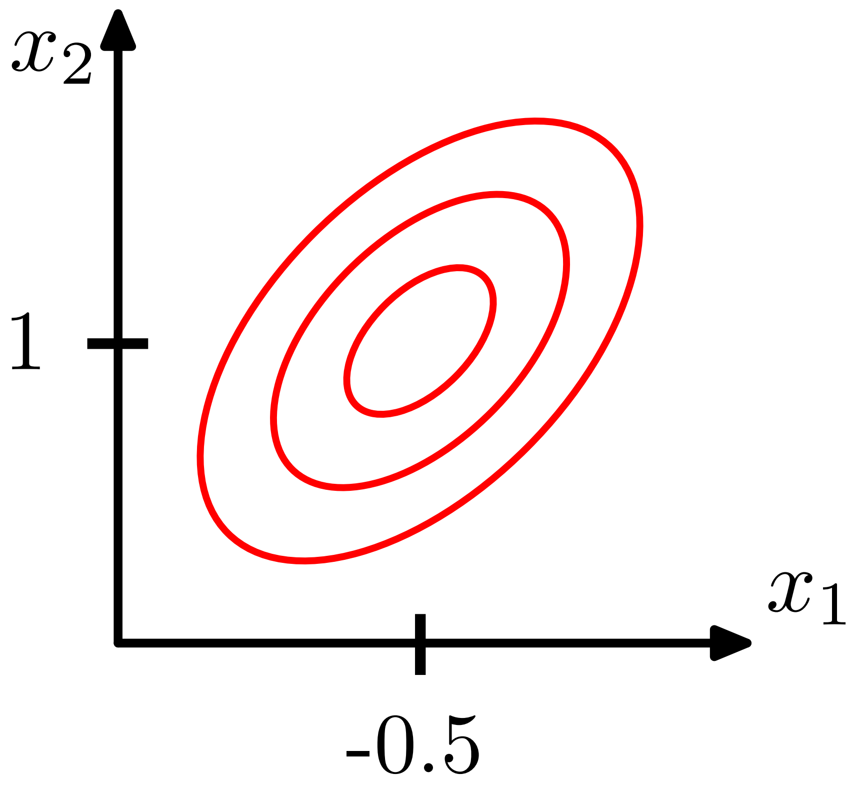
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{a|b} &= \boldsymbol{\mu}_a + \boldsymbol{\Sigma}_{ab}\boldsymbol{\Sigma}_{bb}^{-1}(\mathbf{x}_b - \boldsymbol{\mu}_b)\\ \boldsymbol{\Sigma}_{a|b} &= \boldsymbol{\Sigma}_{aa} - \boldsymbol{\Sigma}_{ab}\boldsymbol{\Sigma}_{bb}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ba}\end{aligned}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$



Hugo Larochelle

LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

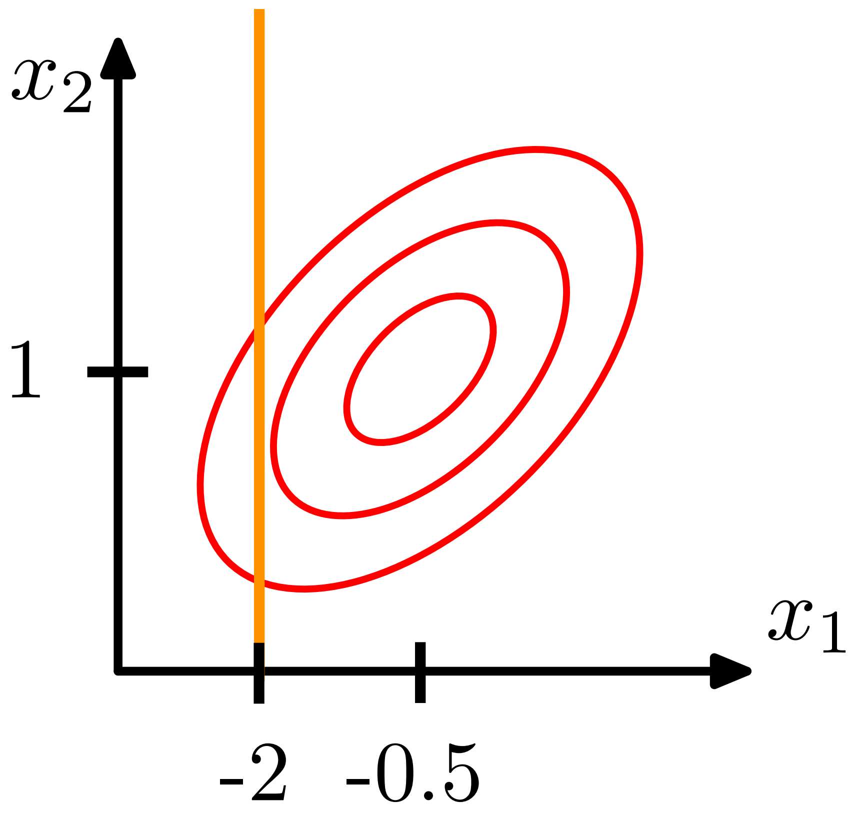
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mu}_{a|b} &= \boldsymbol{\mu}_a + \boldsymbol{\Sigma}_{ab}\boldsymbol{\Sigma}_{bb}^{-1}(\mathbf{x}_b - \boldsymbol{\mu}_b) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{a|b} &= \boldsymbol{\Sigma}_{aa} - \boldsymbol{\Sigma}_{ab}\boldsymbol{\Sigma}_{bb}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ba} \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$



LOI DE PROBABILITÉ GAUSSIENNE

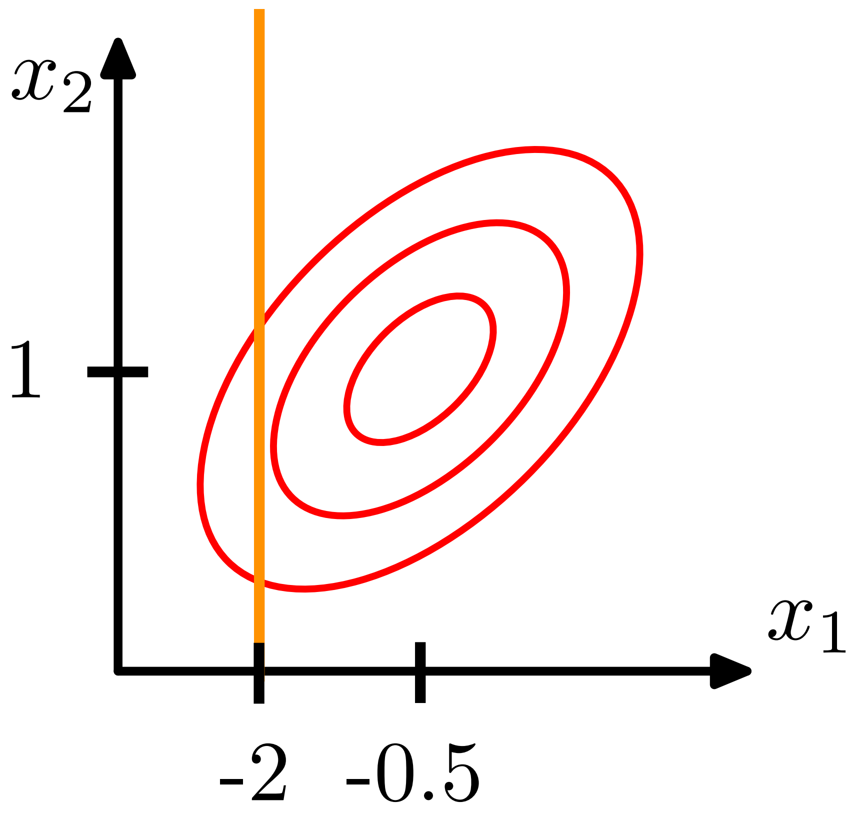
Sujets: loi gaussienne multidimensionnelle

- Exemple : $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\mu}_{a|b} &= \boldsymbol{\mu}_a + \boldsymbol{\Sigma}_{ab}\boldsymbol{\Sigma}_{bb}^{-1}(\mathbf{x}_b - \boldsymbol{\mu}_b) \\ \boldsymbol{\Sigma}_{a|b} &= \boldsymbol{\Sigma}_{aa} - \boldsymbol{\Sigma}_{ab}\boldsymbol{\Sigma}_{bb}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{ba}\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$

Contours de $\mathcal{N}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$



$$p(x_2|x_1 = -2) = \mathcal{N}(x_2|0.5, 1.33)$$

$$\mu_{2|1} = 1 + 0.5 \times (-2 + 0.5)/1.5 = 0.5$$

$$\Sigma_{2|1} = 1.5 - 0.5^2/1.5 \approx 1.33$$