Dérivée partielle

- Dans notre cas, la fonction à optimiser dépend de plus d'une variable
  - elle dépend de tous nos paramètres
- Dans ce cas, on va considérer les **dérivées partielles**, c.-à-d. la dérivée par rapport à chacune des variables en supposant que les autres sont constantes:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x+\Delta, y) - f(x,y)}{\Delta}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(x, y+\Delta) - f(x,y)}{\Delta}$$

Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

Dérivée partielle

- Exemple de fonction à deux variables:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y}$$

- Dérivées partielles:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \underbrace{\frac{2x}{y}}_{\substack{\text{traite } y \\ \text{comme constante}}} \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \underbrace{\frac{-x^2}{y^2}}_{\substack{\text{traite } x \\ \text{comme constante}}}$$

Dérivée partielle

- Un deuxième exemple:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\exp(x_2)}{\exp(x_1) + \exp(x_2) + \exp(x_3)}$$

- Dérivée partielle $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}$:

équivaut à faire la dérivée de $f(x) = \frac{a}{\exp(x) + b}$

où $x = x_1$
et on a des **constantes** $a = \exp(x_2)$ et $b = \exp(x_2) + \exp(x_3)$

Dérivée partielle

- Un deuxième exemple: $f(x) = \dfrac{a}{\exp(x) + b}$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{a}{\exp(x) + b} = a \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{\exp(x) + b}$$

$$= \frac{-a}{(\exp(x) + b)^2} \frac{\partial}{\partial x} (\exp(x) + b)$$

$$= \frac{-a \exp(x)}{(\exp(x) + b)^2}$$

Dérivée partielle

- Un deuxième exemple:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{-a\exp(x)}{(\exp(x)+b)^2}$$

où $x = x_1$, $a = \exp(x_2)$, $b = \exp(x_2) + \exp(x_3)$

- On remplace: $\dfrac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = \dfrac{-\exp(x_2)\exp(x_1)}{(\exp(x_1)+\exp(x_2)+\exp(x_3))^2}$

Dérivée partielle

- Un troisième exemple:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{\exp(x_2)}{\exp(x_1) + \exp(x_2) + \exp(x_3)}$$

- Dérivée partielle $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}$:

équivaut à faire la dérivée de $f(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x) + b}$

où $x = x_2$
et on a une constante $b = \exp(x_1) + \exp(x_3)$

Dérivée partielle

- Un troisième exemple: $f(x) = \frac{\exp(x)}{\exp(x) + b}$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial \exp(x)}{\partial x} \frac{1}{\exp(x) + b} - \frac{\exp(x)}{(\exp(x) + b)^2} \frac{\partial (\exp(x) + b)}{\partial x}$$

$$= \frac{\exp(x)}{\exp(x) + b} - \frac{\exp(x) \exp(x)}{(\exp(x) + b)^2}$$

Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

Dérivée partielle

- Un troisième exemple:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\exp(x)}{\exp(x)+b} - \frac{\exp(x)\exp(x)}{(\exp(x)+b)^2}$$

où $x = x_2\,,\; b = \exp(x_1) + \exp(x_3)$

- On remplace:

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = \frac{\exp(x_2)}{\exp(x_2)+\exp(x_1)+\exp(x_3)} - \frac{\exp(x_2)\exp(x_2)}{(\exp(x_2)+\exp(x_1)+\exp(x_3))^2}$$

Dérivation en chaîne

- Si on peut écrire une fonction $f(x)$ à partir d'un résultat intermédiaire $g(x)$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \frac{\partial f(x)}{\partial g(x)} \frac{\partial g(x)}{\partial x}$$

- Si on peut écrire une fonction $f(x)$ à partir de résultats intermédiaires $g_i(x)$, alors on peut écrire la dérivée partielle

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x} = \sum_i \frac{\partial f(x)}{\partial g_i(x)} \frac{\partial g_i(x)}{\partial x}$$

Dérivation en chaîne

- Exemple: $f(x) = 4\exp(x) + 3(1+x)^3$
  - on considère $g_1(x) = \exp(x)$ et $g_2(x) = 1 + x$
  - donc on peut écrire $f(x) = 4g_1(x) + 3g_2(x)^3$
  - on peut obtenir la dérivée partielle avec les morceaux:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial g_1(x)} = 4 \qquad \frac{\partial g_1(x)}{\partial x} = \exp(x)$$

$$\frac{\partial f(x)}{\partial g_2(x)} = 9g_2(x)^2 \qquad \frac{\partial g_2(x)}{\partial x} = 1$$

- Donc: $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x} = 4\exp(x) + 9g_2(x) = 4\exp(x) + 9(1+x)^2$

Gradient

- On va appeler **gradient** ∇f d'une fonction f le vecteur contenant les dérivées partielles de f par rapport à toutes les variables

- Dans l'exemple avec la fonction $f(x, y)$:

$$\begin{aligned}
\nabla f(x, y) &= \left[\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}, \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}\right] \\
&= \left[\frac{2x}{y}, \frac{-x^2}{y^2}\right]
\end{aligned}$$