

# Problème de satisfaction de contraintes

- Formellement, un problème de satisfaction de contraintes (ou CSP pour *Constraint Satisfaction Problem*) est défini par :
  - ◆ un **ensemble fini de variables**  $V = \{ X_1, \dots, X_N \}$ 
    - » chaque variable  $X_i$  a un **domaine**  $D_i$  de valeurs possibles
  - ◆ un **ensemble fini de contraintes**  $C_1, \dots, C_M$  sur les variables.
    - » une contrainte restreint les valeurs pour un sous-ensemble de variables
- Un **état (nœud)** d'un problème CSP est défini par une **assignation de valeurs**  $\{X_i=v_i, X_j=v_j, \dots\}$  à certaines variables ou à toutes les variables
  - ◆ une assignation qui viole aucune contrainte est dite **compatible** ou **légale**
  - ◆ une assignation est **complète** si elle concerne toutes les variables
  - ◆ une solution à un problème CSP est une assignation **complète et compatible**

# Exemple 1

- Soit le problème CSP défini comme suit :
  - ◆ ensemble de variables  $V = \{X_1, X_2, X_3\}$
  - ◆ un domaine pour chaque variable  $D_1 = D_2 = D_3 = \{1, 2, 3\}$ .
  - ◆ une contrainte spécifiée par l'équation linéaire  $X_1 + X_2 = X_3$ .
- Il y a trois solutions possibles :
  - ◆  $\{X_1=1, X_2=1, X_3=2\}$
  - ◆  $\{X_1=1, X_2=2, X_3=3\}$
  - ◆  $\{X_1=2, X_2=1, X_3=3\}$

# Exemple 2 : Colorier une carte

- Soit une carte de l'Australie
  - ◆ on doit utiliser seulement **trois couleurs** (rouge, vert et bleu) de sorte que **deux états frontaliers n'aient jamais les mêmes couleurs**



# Exemple 2 : Colorier une carte

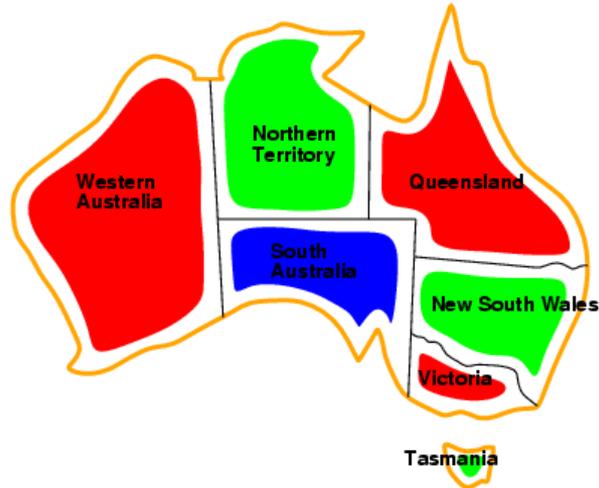
- Formulation du problème CSP :
  - ◆ les variables sont les états de l'Australie :
    - »  $V = \{WA, NT, Q, NSW, V, SA, T\}$
  - ◆ le domaine de chaque variable est l'ensemble des trois couleurs :  $\{R, G, B\}$



- ◆ contraintes : les états frontaliers doivent avoir des couleurs différentes :
  - »  $WA \neq NT, \dots, NT \neq Q, \dots$

# Exemple 2 : Colorier une carte

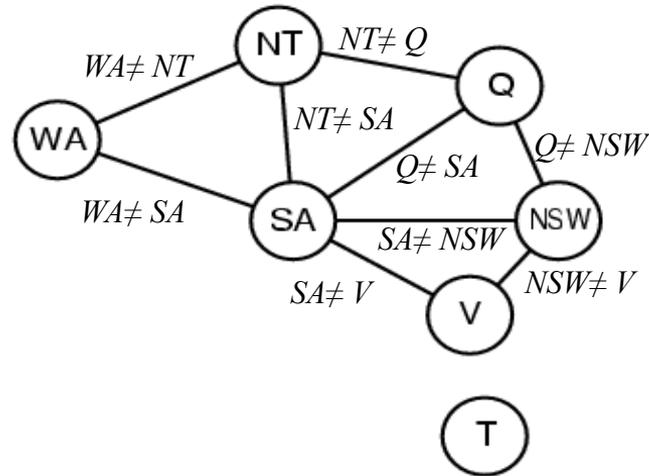
- Solution :



{ WA = R, NT = G, Q = R, NSW = G, V = R, SA = B, T = G }

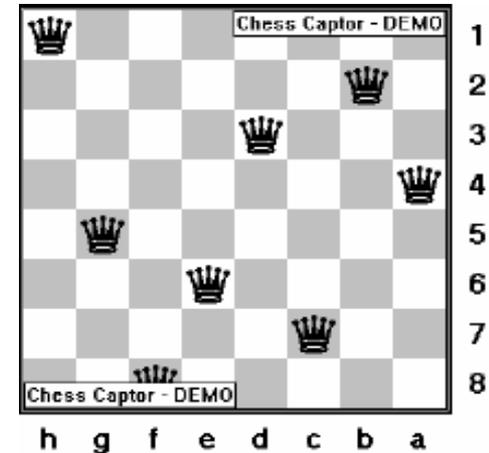
# Graphe de contraintes

- Pour des problèmes avec des **contraintes binaires** (c-à-d. entre deux variables), on peut visualiser le problème CSP par **un graphe de contraintes**
- Un graphe de contraintes est un graphe dont les nœuds sont des variables (un nœud par variable) et les arcs sont des contraintes entre les deux variables



# Exemple 3 : *N*-Queens

- Positionner  $N$  reines sur un échiquier de sorte qu'aucune d'entre elles ne soit en position d'attaquer une autre
  - ◆ exemple avec 8 reines (*8-Queens*)
- Nombre de configurations :
  - ◆ avec  $N = 4$  : 256 configurations.
  - ◆  $N = 8$  : 16 777 216
  - ◆  $N = 16$  : 18,446,744,073,709,551,616 configurations



# Exemple 3 : *N*-Queens

- Modélisation comme problème CSP :
  - ◆ variables : colonnes 1, ...,  $N$
  - ◆ domaines : rangées 1, ...,  $N$
  - ◆ la colonne  $i$  a la valeur  $k$  si la reine dans la colonne  $i$  est dans la rangée  $k$
  - ◆ contraintes : pas deux reines sur même rangée ou diagonale  
(par définition des variables, il y aura toujours une seule reine par colonne)

