Composantes principales du raisonnement déductif

- Une partie de la véracité d'une expression dépend des faits vrais (prémisses) dans une situation donnée
  - Toutes les personnes sont mortelles.
  - Le patient a une température de 41 degrés Celsius.
  - La voiture ne démarre pas.

Syntaxe

- Une autre partie dépend des manipulations syntaxiques qui mènent à cette expression
  - **Si** être une personne implique qu'on est mortel **et si** Dupont est une personne **alors** Dupont est mortel
  - **Si** $p(x)$ implique $m(x)$ pour tout x **et si** $p(A)$ **alors** $m(A)$

Syntaxe des formules

- Une expression en logique du premier ordre est appelée une **formule** (*sentence*)
- Les formules sont des combinaisons de **prédicats**, à l'aide de
  - **connecteurs logiques :** et, ou, etc.
  - **quantificateurs :** il existe, pour tout
- Les **prédicats** décrivent des faits (vrai ou faux), qui correspondent souvent à des relations entre des objets
- Les **objets** sont décrits par des **termes** :
  - **constantes :** *Caesar*, *Marcus*, etc.
  - **variables :** *x*, *y*, etc.
  - **fonctions :** *jambeGauche*(*Marcus*)
- Les **prédicats**, les **connecteurs logiques**, les **quantificateurs** et les **termes** sont décrits par des **symboles**

Symboles

- **Constantes** : *41, Dupont, Robot1*
- **Fonctions :** *temperature*(*x*), *position*(*x*)
- **Prédicats :** *mortel*(*x*), *plusGrand*(*x*,*y*), *partieTerminée*
  - le nombre d'arguments d'une fonction ou d'un prédicat est appelé **arité**
  - les **prédicats ne sont pas des fonctions** qui retournent des valeurs binaires (vrai ou faux)
  - ici ils jouent un rôle fondamental de sorte qu'on doit les traiter séparément des fonctions (ils sont à la base des formules)
- **Variables :** *x*, *y*, *z*
- **Connecteurs :** $\neg$ (non), $\wedge$ (et), $\vee$ (ou), $\rightarrow$ (implique)
- **Quantificateurs :** $\forall$ (pour tout), $\exists$ (il existe)

Termes

- Les **constantes** et les **variables** sont des termes
- Les **applications des fonctions** aux termes sont des termes
  - en d'autres mots, si t_1, …, t_n sont des termes et *f* une fonction à *n* arguments, alors $f(t_1, \ldots, t_n)$ est aussi un terme
  - par exemple : *pere*(*John*), *pere*(*x*), *pere*(*pere*(*x*))

- On pourrait éviter les fonctions en définissant une constante par argument possible de la fonction
  - *pereJohn* et *pereLouis* à la place de *pere*(*John*) et *pere*(*Louis*)
  - par contre, on perd la possibilité de raisonner de façon générale à l'aide des variables
    - » $\forall\, x\ \forall\, y\ sontFreres(x,y) \rightarrow egaux(pere(x),pere(y))$

Formules

- Un prédicat est une formule
  - plus précisément, si $t_1, \ldots, t_n$ sont des termes et p est un prédicat à n arguments, alors $p(t_1, \ldots, t_n)$ est une formule
  - c'est la formule la plus simple qui soit (cas de base)
- La **négation**, la **conjonction**, la **disjonction** et l'**implication** de formules sont aussi des formules
  - plus précisément, si α et β sont des formules, alors $\neg\ \alpha$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ et $\alpha \rightarrow \beta$ sont des formules
- La **quantification universelle** et **la quantification existentielle** d'une formule est une formule
  - plus précisément, si α est une formule et x est une variable, alors $\forall\, x\, \alpha$ et $\exists\, x\, \alpha$ sont des formules

Notations

- **Priorités et parenthèses**
  - ordre des priorités : $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$
  - on utilise les parenthèses de la même façon que dans les expressions arithmétiques pour éviter les ambiguïtés
  - les quantifieurs s'appliquent à toute la formule à sa droite
    - » ex. : . $\forall x \; p(x) \vee q(x) \rightarrow r(x)$ est équivalent à
      $\forall x \; (p(x) \vee q(x) \rightarrow r(x))$ et non
      $(\forall x \; p(x)) \vee q(x) \rightarrow r(x)$
- **Équivalences**
  - $\alpha \vee \beta$ est équivalent à $\neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta)$
  - $\alpha \rightarrow \beta$ est équivalent à $\neg \alpha \vee \beta$
  - $\exists v \, \alpha$ est équivalent à $\neg \forall v \neg \alpha$

Exercice

- Faits :
  1. Marcus est une personne.
  2. Marcus est un pompéien.
  3. Tous les pompéiens sont des romains.
  4. César est un dirigeant.
  5. Tout le monde est loyal à quelqu'un.
  6. Tous les romains sont loyaux à César ou le haïssent.
  7. Les seuls dirigeants qu'une personne essaie d'assassiner sont ceux auxquels elle n'est pas loyal
  8. Marcus a essayé d'assassiner César.

- Forme logique du premier ordre :
  1. $personne(Marcus)$
  2. $pompeien(Marcus)$
  3. $\forall x\ pompeien(x) \rightarrow romain(x)$
  4. $dirigeant(Cesar)$
  5. $\forall x\ \exists y\ loyal(x,y)$
  6. $\forall x\ romain(x) \rightarrow loyal(x,Cesar) \vee hait(x,Cesar)$
  7. $\forall x\ \forall y\ personne(x) \wedge dirigeant(y) \wedge assassiner(x,y) \rightarrow \neg loyal(x,y)$
  8. $assassiner(Marcus,Cesar)$