Preuve par résolution

- Procédure générale pour faire de l'inférence
  - modus ponens et l'instantiation universelle sont des cas particuliers

- Cette procédure est correcte et complète (sous certaine condition, à voir plus tard)

- On aura besoin des outils suivants :
  - la **substitution**
  - l'**unification**
  - la **transformation sous forme normale conjonctive**

Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

Substitution

- On définit un **littéral** comme un prédicat ou la négation d'un prédicat
  - ex. : $p_1(x, y)$, $\neg\, p_1(x, y)$

- On définit une **clause** comme une disjonction de littéraux
  - ex. : $p_1(x, y) \vee p_2(x, y, z) \vee \neg\, p_1(x, z)$

- Une **substitution** est un ensemble (possiblement vide) de paires de la forme $x_i = t_i$ où x_i est une variable et t_i est un terme et les x_i sont **distincts**
  - ex. : $\{\, x = John,\;\; y = pere(Mary) \,\}$

Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

Substitution

- L'application d'une substitution $\theta = \{x_1 = t_1, \ldots, x_n = t_n\}$ à un littéral α donne un littéral $\alpha\theta$ obtenu de α en remplaçant **simultanément** toute occurrence de x_i par t_i dans α, pour chaque paire $x_i = t_i$.

- $\alpha\theta$ est appelé **instance** de α pour θ
  - exemple : $\alpha = p(x, y, f(a))$, $\theta = \{y = x, x = b\}$

$$\alpha\theta = p(b, x, f(a))$$

- Si C est la clause $\alpha_1 \vee \ldots \vee \alpha_n$, $C\theta$ est la clause $\alpha_1\theta \vee \ldots \vee \alpha_n\theta$

Composition de substitutions

- Quelle serait la substitution équivalent à l'application successive de deux substitution $\theta = \{ x_1 = s_1, \dots, x_m = s_m \}$ et $\sigma = \{ y_1 = t_1, \dots, y_n = t_n \}$
  - on note une telle **composition** $\theta\sigma$

- La composition $\theta\sigma$ de θ et σ est la substitution obtenue comme suit :
  1. construire l'ensemble

     $$\{ x_1 = s_1\sigma, \dots, x_m = s_m\sigma, \; y_1 = t_1, \dots, y_m = t_n \}$$

     en appliquant σ à tous les termes s_i
  2. supprimer toutes les paires $y_i = t_i$ telles que $y_i \in \{x_1, \dots , x_m\}$
  3. supprimer les identités, c-à-d., les paires pour lesquelles $s_i\sigma$ est devenu x_i

Composition de substitutions : exemple

- Composition de $\theta = \{ x = f(y), y = z \}$ et $\sigma = \{ x = A, y = B, z = y \}$

Composition de substitutions : exemple

- Composition de $\theta = \{ x = f(y), y = z \}$ et $\sigma = \{ x = A, y = B, z = y \}$

1. $\{ \underbrace{x = f(y), y = z}, \underbrace{x = A, y = B, z = y} \}$

Composition de substitutions : exemple

- Composition de $\theta = \{\, x = f(y), y = z \,\}$ et $\sigma = \{\, x = A, y = B, z = y \,\}$

1. $\{\, x = f(B), y = y, x = A, y = B, z = y \,\}$

Composition de substitutions : exemple

- Composition de $\theta = \{ x = f(y), y = z \}$ et $\sigma = \{ x = A, y = B, z = y \}$

1. $\{ x = f(B), y = y, x = A, y = B, z = y \}$
2. $\{ \underline{x} = f(B), \underline{y} = y, \cancel{\underline{x} = A}, \cancel{\underline{y} = B}, z = y \}$

Composition de substitutions : exemple

- Composition de $\theta = \{ x = f(y), y = z \}$ et $\sigma = \{ x = A, y = B, z = y \}$

1. $\{ x = f(B), y = y, x = A, y = B, z = y \}$
2. $\{ \underline{x} = f(B), \underline{y} = y, \cancel{\underline{x} = A}, \cancel{\underline{y} = B}, z = y \}$
3. $\{ x = f(B), \cancel{y = y}, \cancel{x = A}, \cancel{y = B}, z = y \}$

Composition de substitutions : exemple

- Composition de $\theta = \{ x = f(y), y = z \}$ et $\sigma = \{ x = A, y = B, z = y \}$

1. $\{ x = f(B), y = y, x = A, y = B, z = y \}$
2. $\{ \underline{x} = f(B), \underline{y} = y, \cancel{\underline{x} = A}, \cancel{\underline{y} = B}, z = y \}$
3. $\{ x = f(B), \cancel{y = y}, \cancel{x = A}, \cancel{y = B}, z = y \}$

Résultat: $\theta\sigma = \{ x = f(B), z = y \}$

Propriétés des substitutions

- La substitution identitée, notée ε, est l'ensemble vide
- $\theta\varepsilon = \theta$, pour toute substitution θ
- $(\alpha\sigma)\theta = \alpha(\sigma\theta)$, pour toute clause α et substitutions θ et σ
- $(\theta\sigma)\gamma = \theta(\sigma\gamma)$, pour toutes substitutions θ, σ et γ

Hugo Larochelle et Froduald Kabanza