Preuve par résolution

- Procédure générale pour faire de l'inférence
  - modus ponens et l'instantiation universelle sont des cas particuliers

- Cette procédure est correcte et complète (sous certaine condition, à voir plus tard)

- On aura besoin des outils suivants :
  - la **substitution**
  - l'**unification**
  - la **transformation sous forme normale conjonctive**

Unification

- Soit S = $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ une paire de 2 littéraux, on aimerait trouver une substitution θ qui **unifie** α_1 et α_2, c.-à-d. telle que $\alpha_1\theta = \alpha_2\theta$

  - ex. : $\{ p(f(x),z), p(y,A) \}$ sont unifiés par $\theta = \{y = f(x), z = A\}$ (*A* est un constante)

    $p(f(x),z)\ \theta = \boldsymbol{p(f(x),A)}$ et $p(y,A)\ \theta = \boldsymbol{p(f(x),A)}$

  - ex. : $\{ p(f(x),A), p(y,f(w)) \}$ ne sont pas unifiables, puisqu'on ne peut pas substituer la constante *A* par $f(w)$

Unificateur le plus général

- Un **unificateur** θ de *S* est appelé **unificateur le plus général** (**UPG**) de *S* si pour tout unificateur σ de *S*, il existe une substitution γ telle que σ = θγ
  - ex. : $\theta = \{y = f(x),\ z = A\}$ est un UPG pour $\{\ p(f(x),z),\ p(y,A)\ \}$
    - » $p(f(x),z)\ \theta = p(y,A)\ \theta = p(f(x),A)$
  - ex. : $\sigma = \{y = f(A),\ x = A,\ z = A\}$ est unificateur mais pas UPG pour $\{\ p(f(x),z),\ p(y,A)\ \}$
    - » $p(f(x),z)\ \sigma = p(y,A)\ \sigma = p(f(A),A)$
  - la substitution $\gamma = \{x = A\}$ permet d'obtenir $\sigma = \theta\ \gamma = \{y = f(A),\ x = A,\ z = A\}$
  - aucune substitution γ permet d'obtenir θ = σ γ
- On appelle **ensemble de désaccord** entre deux littéraux la paire des premiers termes des deux littéraux qui diffèrent (à partir de la gauche)
  - $\{\ p(f(x),z),\ p(y,A)\ \}$: l'ensemble de désaccord est $\{\ f(x),\ y\ \}$
  - $\{\ p(f(x),z),\ p(f(x),A)\ \}$: l'ensemble de désaccord est $\{\ z,\ A\ \}$

Unificateur le plus général

Algorithme UNIFICATEUR(S)

1. k=1; σ_1 =ε
2. **Si** σ_k est unificateur pour S,
   Alors retourner σ_k comme UPG de S
   Sinon calculer D_k l'ensemble de désaccord de $S\sigma_k$
3. **Si** il existe une paire (v, t) telle que v est une **variable** dans D_k qui n'apparaît pas dans t et $\{v = t\}$ est un unificateur pour D_k,
   alors $\sigma_{k+1} = \sigma_k\{v = t\}$, k=k+1;
   retourner à 2.
   Sinon exit; S n'est pas unifiable.

Unificateur le plus général : exemple 1

- Trouver l'UPG de $p(x, f(x), y)$ et $p(y, z, u)$

- **Itération k=1**
  1. $\sigma_1 = \varepsilon = \{\}$ (σ$_k$ est la valeur courante de l'UPG que l'on construit)

  2. σ_1 unifie-t-elle $p(x, f(x), y)$ et $p(y, z, u)$
     » **non** : $p(x, f(x), y)\ \sigma_1 \rightarrow p(x, f(x), y) \neq p(y, z, u) \leftarrow p(y, z, u)\ \sigma_1$
     » alors cherche ensemble de désaccord $D_1 = \{x, y\}$

  3. Existe-t-il un substitution qui unifie les éléments de D_1
     » **oui** : $\{x = y\}$ (on aurait aussi pu choisir $\{y = x\}$ à la place)
     » alors met à jour UPG : $\sigma_2 = \sigma_1 \{x = y\} = \{x = y\}$

Unificateur le plus général : exemple 1

- Trouver l'UPG de $p(x, f(x), y)$ et $p(y, z, u)$

- **Itération k=2**
  1. $\sigma_2 = \{x = y\}$

  2. σ_2 unifie-t-elle $p(x, f(x), y)$ et $p(y, z, u)$
     » **non** : $p(x, f(x), y)\ \sigma_2 \rightarrow p(y, f(y), y) \neq p(y, z, u) \leftarrow p(y, z, u)\ \sigma_2$
     » alors cherche ensemble de désaccord $D_2 = \{f(y), z\}$

  3. Existe-t-il un substitution qui unifie les éléments de D_2
     » **oui** : $\{z = f(y)\}$
     » alors met à jour UPG : $\sigma_3 = \sigma_2 \{z = f(y)\} = \{x = y, z = f(y)\}$

Unificateur le plus général : exemple 1

- Trouver l'UPG de $p(x, f(x), y)$ et $p(y, z, u)$

- **Itération k=3**
  1. $\sigma_3 = \{x = y, z = f(y)\}$

  2. σ_3 unifie-t-elle $p(x, f(x), y)$ et $p(y, z, u)$
     » **non** : $p(x, f(x), y)\,\sigma_3 \rightarrow p(y, f(y), y) \neq p(y, f(y), u) \leftarrow p(y, z, u)\,\sigma_3$
     » alors cherche ensemble de désaccord $D_3 = \{y, u\}$

  3. Existe-t-il un substitution qui unifie les éléments de D_3
     » **oui** : $\{y = u\}$ (on aurait aussi pu choisir $\{u = y\}$ à la place)
     » alors met à jour UPG : $\sigma_4 = \sigma_3 \{y = u\} = \{x = u, z = f(u), y = u\}$

Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

Unificateur le plus général : exemple 1

- Trouver l'UPG de $p(x, f(x), y)$ et $p(y, z, u)$

- **Itération k=4**
  1. $\sigma_4 = \{x = u, z = f(u), y = u\}$

  2. σ_4 unifie-t-elle $p(x, f(x), y)$ et $p(y, z, u)$
     » **oui** : $p(x, f(x), y)\ \sigma_4 \rightarrow p(u, f(u), u) = p(u, f(u), u) \leftarrow p(y, z, u)\ \sigma_4$
     » alors on retourne l'UPG σ_4

Unificateur le plus général : exemple 2

- Trouver l'UPG de $p(f(y), x)$ et $p(x, y)$

- **Itération k=1**
  1. $\sigma_1 = \varepsilon = \{\}$ (σ_k est la valeur courante de l'UPG que l'on construit)

  2. σ_1 unifie-t-elle $p(f(y), x)$ et $p(x, y)$
     » **non** : $p(f(y), x)\ \sigma_1 \rightarrow p(f(y), x) \neq p(x, y) \leftarrow p(x, y)\ \sigma_1$
     » alors cherche ensemble de désaccord $D_1 = \{f(y), x\}$

  3. Existe-t-il un substitution qui unifie les éléments de D_1
     » **oui** : $\{x = f(y)\}$
     » alors met à jour UPG : $\sigma_2 = \sigma_1 \{x = f(y)\} = \{x = f(y)\}$

Unificateur le plus général : exemple 2

- Trouver l'UPG de $p(f(y), x)$ et $p(x, y)$

- **Itération k=2**
  1. $\sigma_2 = \{x = f(y)\}$

  2. σ_2 unifie-t-elle $p(f(y), x)$ et $p(x, y)$
     » **non** : $p(f(y), x)\ \sigma_2 \rightarrow p(f(y), f(y)) \neq p(f(y), y) \leftarrow p(x, y)\ \sigma_1$
     » alors cherche ensemble de désaccord $D_2 = \{f(y), y\}$

  3. Existe-t-il un substitution qui unifie les éléments de D_2
     » **non** : $y = f(y)$ n'est pas valide puisque y apparaît à gauche et à droite
     » alors retourne faux (**n'a pas d'UPG puisque n'est pas unifiable**)

Exercices

- Dire si un UPG existe pour les littéraux suivants, et si oui l'identifier
  - $p(x, f(x))$ et $p(x, y)$
  - $p(x, z)$ et $p(z, f(x))$
  - $p(f(y), z)$ et $p(z, f(x))$

Exercices

- Dire si un UPG existe pour les littéraux suivants, et si oui l'identifier
  - $p(x, f(x))$ et $p(x, y)$ $\Rightarrow$ $\{ y = f(x) \}$
  - $p(x, z)$ et $p(z, f(x))$ $\Rightarrow$ n'existe pas
  - $p(f(y), z)$ et $p(z, f(x))$ $\Rightarrow$ $\{ z = f(x), y = x \}$