Règle de chaînage

- **Règle du produit :**
  - $P(Pourriel{=}faux, Inconnu{=}vrai)$
    $= P(Pourriel{=}faux \mid Inconnu{=}vrai)\ P(Inconnu{=}vrai)$
    $= P(Inconnu{=}vrai \mid Pourriel{=}faux)\ P(Pourriel{=}faux)$
  - En général :
    $P(Pourriel, Inconnu) = P(Pourriel \mid Inconnu)\ P(Inconnu)$
    $= P(Inconnu \mid Pourriel)\ P(Pourriel)$

- **Règle de chaînage** (***chain rule***) pour n variables $X_1 \ldots X_n$:
  - $$\begin{aligned} P(X_1, \ldots, X_n) &= P(X_1,\ldots,X_{n-1})\ P(X_n \mid X_1,\ldots,X_{n-1}) \\ &= P(X_1,\ldots,X_{n-2})\ P(X_{n-1} \mid X_1,\ldots,X_{n-2})\ P(X_n \mid X_1,\ldots,X_{n-1}) \\ &= \ldots \\ &= \prod_{i=1..n} P(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) \end{aligned}$$

Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

Règle de chaînage

- La règle du chaînage est vraie, quelle que soit la distribution de $X_1 \ldots X_n$
  - plutôt que de spécifier toutes les probabilités jointes $P(X_1, \ldots, X_n)$, on pourrait plutôt spécifier $P(X_1)$, $P(X_2|X_1)$, $P(X_3|X_1, X_2)$, ..., $P(X_n \mid X_1,\ldots,X_{n-1})$

- Exemple, on aurait pu spécifier :
  - $P(Pourriel{=}faux) = 0.8$, $P(Pourriel{=}vrai) = 0.2$
  - $P(Inconnu{=}faux| \; Pourriel{=}faux) = 0.9$, $P(Inconnu{=}vrai| \; Pourriel{=}faux) = 0.1$
    $P(Inconnu{=}faux| \; Pourriel{=}vrai) = 0.4$, $P(Inconnu{=}vrai \mid Pourriel{=}vrai) = 0.6$

- On aurait tous les ingrédients pour calculer les $P(Pourriel, Inconnu)$:
  - $P(Pourriel{=}faux, Inconnu{=}vrai) = P(Inconnu{=}vrai \mid Pourriel{=}faux) \; P(Pourriel{=}faux)$
    $= 0.1 * 0.8 = 0.08$
  - $P(Pourriel{=}vrai, Inconnu{=}vrai) = P(Inconnu{=}vrai|Pourriel{=}vrai) \; P(Pourriel{=}vrai)$
    $= 0.6 * 0.2 = 0.12$

Règle de Bayes

- Et si on veut calculer $P(Pourriel{=}faux \mid Inconnu{=}vrai)$?

$$P(Pourriel{=}faux \mid Inconnu{=}vrai)$$

$$= P(Pourriel{=}faux\ ,\ Inconnu{=}vrai)\ /\ P(Inconnu{=}vrai)$$

$$= P(Inconnu{=}vrai \mid Pourriel{=}faux\ )\ P(Pourriel{=}faux)\ /\ P(Inconnu{=}vrai)$$

$$= \frac{P(Inconnu{=}vrai \mid Pourriel{=}faux)\ P(Pourriel{=}faux)}{P(Inconnu{=}vrai,\ Pourriel{=}faux) + P(Inconnu{=}vrai,\ Pourriel{=}vrai))}$$

$$= 0.08\ /\ (0.08 + 0.12) = \mathbf{0.4}$$

Règle de Bayes

- **Règle de Bayes** : $P(Cause|Effet) = P(Effet|Cause)\ P(Cause) \ /\ P(Effet)$
  - $P(Pourriel \mid Inconnu) = P(Inconnu|Pourriel)\ P(Pourriel) \ /\ P(Inconnu)$

- On appelle $P(Pourriel)$ une **probabilité a priori**
  - c'est notre croyance p/r à ce qu'un nouveau courriel soit un pourriel **avant** toute observation
- On appelle $P(Pourriel|\ Inconnu)$ une **probabilité a posteriori**
  - c'est notre croyance mise à jour **après** avoir observé que l'auteur du courriel est inconnu
- La règle de Bayes lie ces deux probabilités ensemble

- Donne une probabilité **diagnostique** à partir d'une probabilité **causale** :

Hugo Larochelle et Froduald Kabanza