Probabilités dans un RB

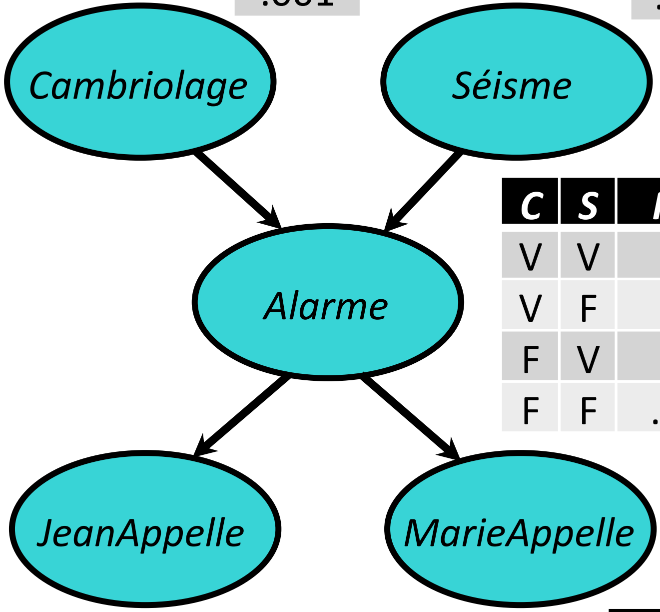
- Une **table de probabilités conditionnelles** (TPC) donne la probabilité pour chaque valeur du nœud étant donnés les combinaisons des valeurs des parents du nœud (c'est l'équivalent d'une **distribution**)

- Si *X* n'a pas de parents, sa distribution de probabilités est dite **inconditionnelle** ou **a priori**

- Si *X* a des parents, sa distribution de probabilités est dite **conditionnelle**

***P*(*c*)**
.001

***P*(*s*)**
.002



C	***S***	***P*(*a*)**
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	***P*(*j*)**
V	.90
F	.05

A	***P*(*m*)**
V	.70
F	.01

Calcul de probabilités conjointes

- Un RB est une **façon compacte** de représenter des probabilités conjointes

- Par définition, la probabilité conjointe de X_1 et X_2 est donnée par la distribution $P(X_1,X_2)$, pour une valeur donnée de X_1 et X_2

- La distribution conditionnelle de X_1 sachant X_2 est notée $P(X_1 | X_2)$
  - $P(X_1,X_2) = P(X_1 \mid X_2)\, P(X_2)$

- Soit $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, l'ensemble des variables d'un RB :

$$P(X_1, \ldots, X_n) = \Pi_{i=1}^{n} P(X_i \mid Parents(X_i))$$

- En d'autres mots, la distribution conjointe des variables d'un RB est définie comme étant le produit des distributions conditionnelles (locales)

Calcul de probabilités conjointes

- En fait, quelque soit l'ensemble de variables $X = \{X_1, \ldots, X_n\}$, par définition :

$$\begin{aligned} P(X_1, \ldots, X_n) &= P(X_n \mid X_{n-1}, \ldots, X_1)\, P(X_{n-1}, \ldots, X_1) \\ &= P(X_n \mid X_{n-1}, \ldots, X_1)\, P(X_{n-1} \mid X_{n-2}, \ldots, X_1) \ldots P(X_2 \mid X_1)\, P(X_1) \\ &= \Pi_{i=1}^{n} P(X_i \mid X_{i-1}, \ldots, X_1) \end{aligned}$$

- Pour un RB : $P(X_1, \ldots, X_n) = \Pi_{i=1}^{n} P(X_i \mid Parents(X_i))$
  - ceci est cohérent avec l'assertion précédente pour autant que $Parents(X_i)$ soit l'ensemble de $\{X_{i-1}, \ldots, X_1\}$
  - sinon, un RB est alors une façon de **représenter les indépendances conditionnelles**

Exemple : probabilité conjointe

$$P(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \mid Parents(X_i))$$

$P(J{=}\text{V}, M{=}\text{V}, A{=}\text{V}, C{=}\text{F}, S{=}\text{F})$

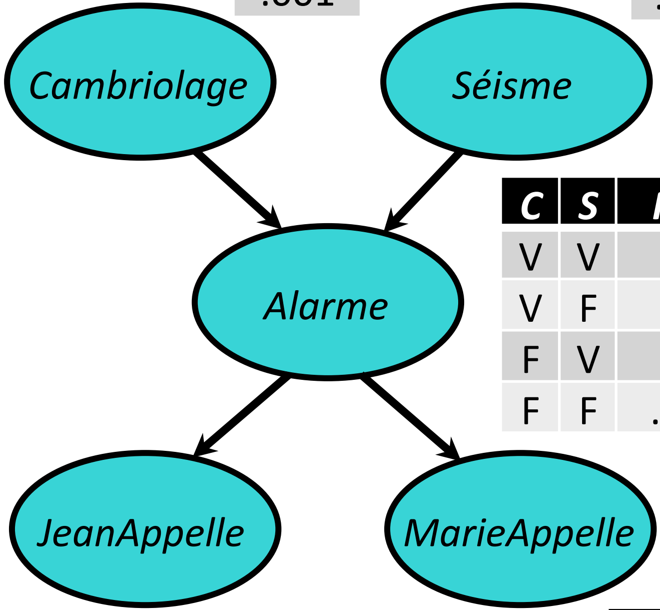
$= P(J{=}\text{V} \mid A{=}\text{V})\ P(M{=}\text{V} \mid A{=}\text{V})$
$\quad P(A{=}\text{V} \mid C{=}\text{F}, S{=}\text{F})\ P(C{=}\text{F})\ P(S{=}\text{F})$

$= .90 * .70 * .001 *$
$\quad .999 * \ .998$

$\approx .00062$

P(*c*)
.001

P(*s*)
.002



C	*S*	*P*(*a*)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	*P*(*j*)
V	.90
F	.05

A	*P*(*m*)
V	.70
F	.01

Exemple : probabilité marginale

$P(C{=}\mathrm{F}, A{=}\mathrm{V}) = \Sigma_m\, \Sigma_j\, \Sigma_s\, P(J{=}j, M{=}m, A{=}\mathrm{V}, C{=}\mathrm{F}, S{=}s)$

$= \Sigma_m\, \Sigma_j\, \Sigma_s\, P(j|A{=}\mathrm{V})\, P(m|A{=}\mathrm{V})\, P(A{=}\mathrm{V}|C{=}\mathrm{F}, s)\, P(C{=}\mathrm{F})\, P(s)$

$= \Sigma_s\, \Sigma_j\, \Sigma_m\, P(j|A{=}\mathrm{V})\, P(m|A{=}\mathrm{V})\, P(A{=}\mathrm{V}|C{=}\mathrm{F}, s)\, P(C{=}\mathrm{F})\, P(s)$

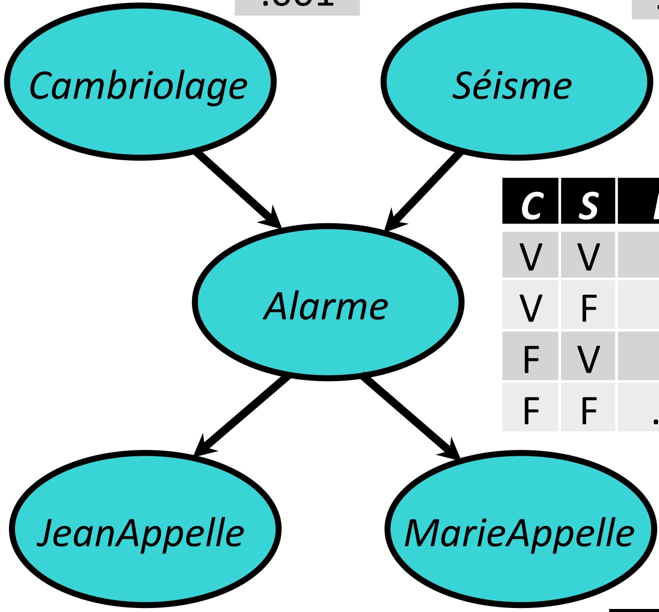
$= \Sigma_s\, \Sigma_j\, P(j|A{=}\mathrm{V})\, P(A{=}\mathrm{V}|C{=}\mathrm{F}, s)\, P(C{=}\mathrm{F})\, P(s)\, \underbrace{\cancel{\Sigma_m\, P(m|A{=}\mathrm{V})}}_{=\,1}$

$= \Sigma_s\, P(A{=}\mathrm{V}|C{=}\mathrm{F}, s)\, P(C{=}\mathrm{F})\, P(s)\, \underbrace{\cancel{\Sigma_j\, P(j|A{=}\mathrm{V})}}_{=\,1}$

$= P(A{=}\mathrm{V}|C{=}\mathrm{F}, S{=}\mathrm{V})\, P(C{=}\mathrm{F})\, P(S{=}\mathrm{V})$
$\quad + P(A{=}\mathrm{V}|C{=}\mathrm{F}, S{=}\mathrm{F})\, P(C{=}\mathrm{F})\, P(S{=}\mathrm{F})$
$= .29 * .999 * .002 + .001 * .999 * .998$
≈ 0.0016

P(c)
.001

P(s)
.002



C	***S***	***P(a)***
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	***P(j)***
V	.90
F	.05

A	***P(m)***
V	.70
F	.01

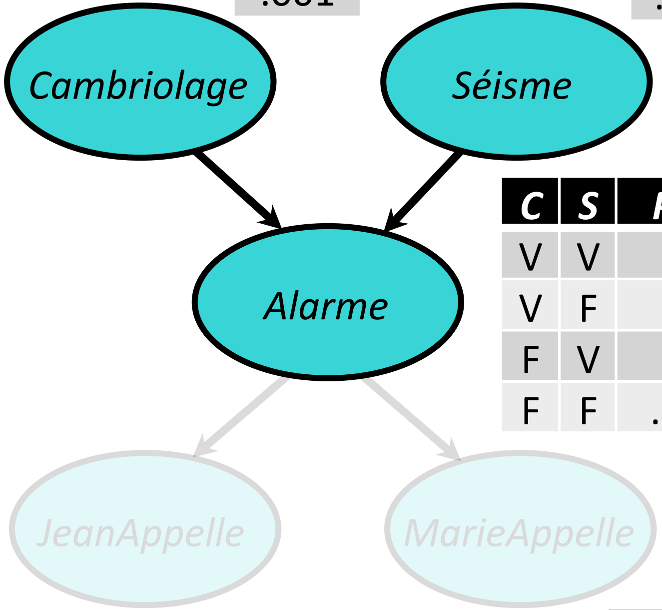
Probabilité marginale

$$P(C{=}\mathrm{F},\, A{=}\mathrm{V}) = \Sigma_m\, \Sigma_j\, \Sigma_s\, P(J{=}j, M{=}m,\, A{=}\mathrm{V}, C{=}\mathrm{F}, S{=}s)$$
$$= \Sigma_s\, P(A{=}\mathrm{V} \mid C{=}\mathrm{F},\, s)\, P(C{=}\mathrm{F})\, P(s)$$

- Pour les probabilités marginales, on peut ignorer les nœuds **dont les descendants ne sont pas les nœuds observés**
  - *Cambriolage* et *Alarme* ne sont pas des descendants de *JeanAppelle* ou *MarieAppelle*, alors on peut les ignorer
  - *Alarme* est un descendant de *Séisme*, alors on doit marginaliser *Séisme* explicitement

P(*c*)
.001

P(*s*)
.002



C	*S*	*P*(*a*)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	*P*(*j*)
V	.90
F	.05

A	*P*(*m*)
V	.70
F	.01

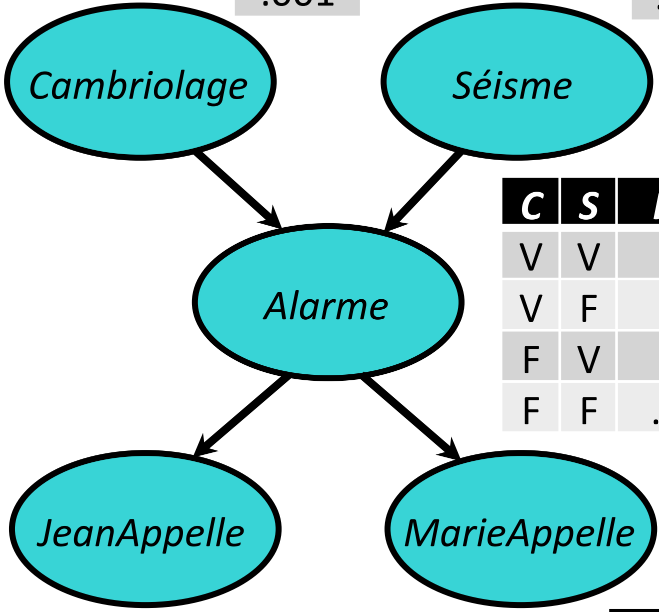
Probabilités conditionnelles

- On peut alors calculer toute probabilité conditionnelle
  - une probabilité conditionnelle est le ratio des probabilités marginales ou conjointes ($P(A|B) = P(A,B)/P(B)$)

- Un avantage d'un RB est qu'il est facile d'identifier les indépendances conditionnelles
  - ceci permet de réduire les calculs à faire

P(*c*)
.001

P(*s*)
.002



C	*S*	*P*(*a*)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	*P*(*j*)
V	.90
F	.05

A	*P*(*m*)
V	.70
F	.01