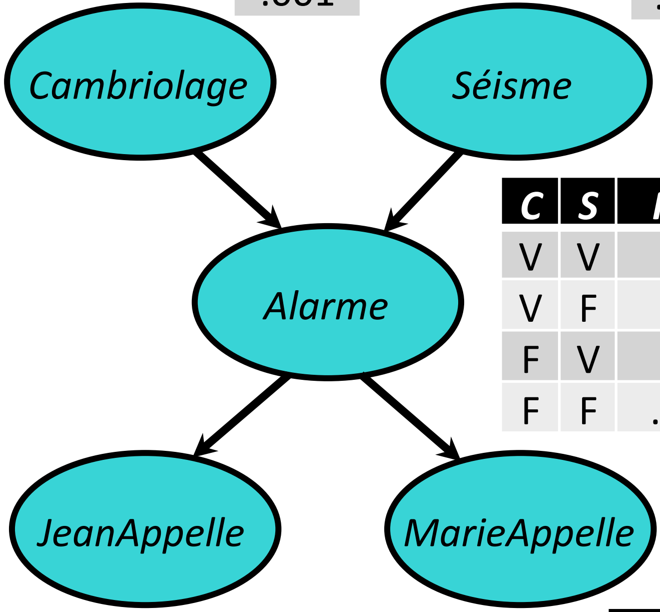
Probabilités conditionnelles

- On peut alors calculer toute probabilité conditionnelle
  - une probabilité conditionnelle est le ratio des probabilités marginales ou conjointes ($P(A|B) = P(A,B)/P(B)$)
- Un avantage d'un RB est qu'il est facile d'identifier les indépendances conditionnelles
  - ceci permet de réduire les calculs à faire



$P(c)$
.001

$P(s)$
.002

C	S	$P(a)$
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	$P(j)$
V	.90
F	.05

A	$P(m)$
V	.70
F	.01

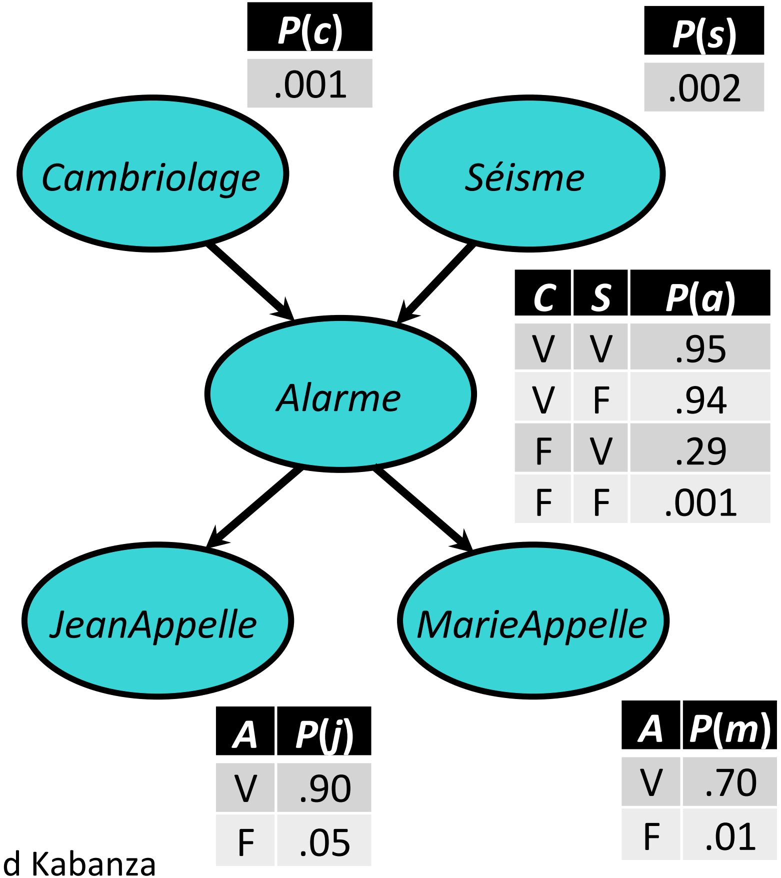
Indépendance conditionnelle dans un RB

1. Relation entre **grand-parent** et **enfant** étant donné parent :
   - sont indépendants si parent observé

- Exemples :
  - *Cambriolage* et *MarieAppelle* sont **dépendants** a priori
  - mais ils sont **indépendants** étant donné *Alarme* :

    $$P(M|A,C) = P(M|A)$$

  - si *A* est connu, *C* n'intervient pas dans le calcul
  - **connaître** *A* « bloque » le chemin entre *M* et *C*



P(*c*)
.001

P(*s*)
.002

C	*S*	*P*(*a*)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	*P*(*j*)
V	.90
F	.05

A	*P*(*m*)
V	.70
F	.01

Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

Indépendance conditionnelle dans un RB

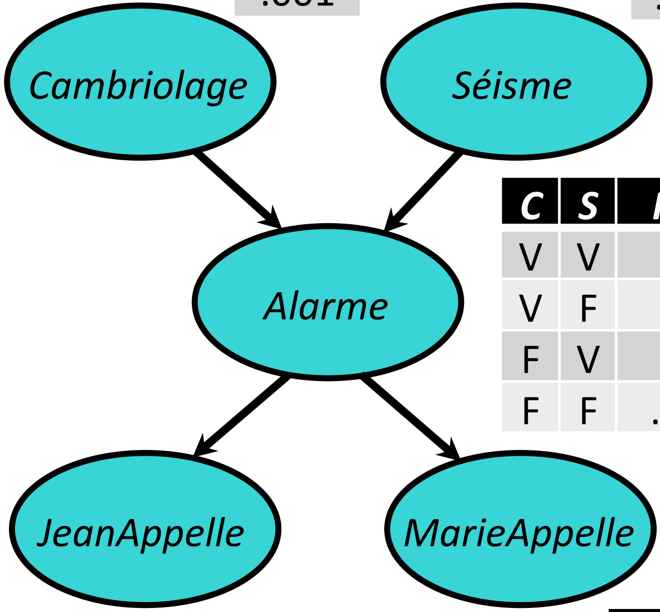
$$P(M|A,C) = P(M,A,C) \;/\; P(A,C)$$

$$= \frac{\Sigma_s\, P(M,A,C,S{=}s)}{\Sigma_s\, P(A,C,S{=}s)}$$

$$= \frac{\Sigma_s\, P(M|A)\, P(A|C,S{=}s)\, P(S{=}s)\, P(C)}{\Sigma_s\, P(A|C,S{=}s)\, P(S{=}s)\, P(C)}$$

$$= \frac{P(M|A)\, \cancel{\Sigma_s\, P(A|C,S{=}s)\, P(S{=}s)\, P(C)}}{\cancel{\Sigma_s\, P(A|C,S{=}s)\, P(S{=}s)\, P(C)}}$$

$$= P(M|A)$$



P(c)
.001

P(s)
.002

C	*S*	*P(a)*
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	*P(j)*
V	.90
F	.05

A	*P(m)*
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

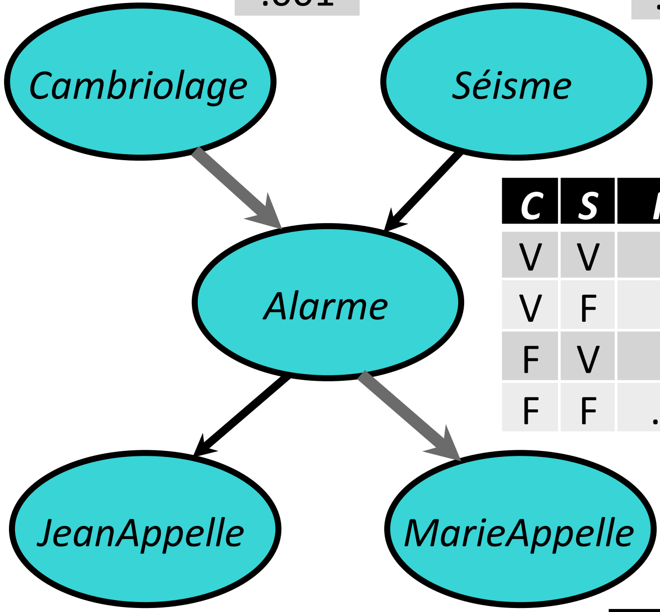
$P(M|A,C) = P(M,A,C) \,/\, P(A,C)$

$$= \frac{\sum_s P(M,A,C,S=s)}{\sum_s P(A,C,S=s)}$$

$$= \frac{\sum_s \mathbf{P(M|A)\ P(A|C,S=s)}\ P(S=s)\ P(C)}{\sum_s P(A|C,S=s)\ P(S=s)\ P(C)}$$

$$= P(M|A) \frac{\cancel{\sum_s P(A|C,S=s)\ P(S=s)\ P(C)}}{\cancel{\sum_s P(A|C,S=s)\ P(S=s)\ P(C)}}$$

$$= P(M|A)$$



P(c)
.001

P(s)
.002

C	*S*	*P(a)*
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	*P(j)*
V	.90
F	.05

A	*P(m)*
V	.70
F	.01

Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

Indépendance conditionnelle dans un RB

2. Relation entre **deux enfants** étant donné parent :
   - sont indépendants si parent observé

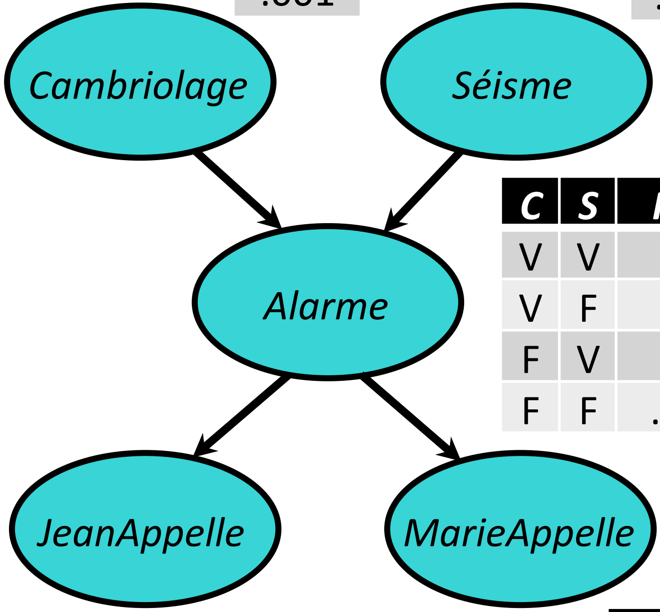
- Exemples :
  - *JeanAppelle* et *MarieAppelle* sont **dépendants** a priori
  - mais ils sont **indépendants** étant donné *Alarme* :

    $$P(M|A,J) = P(M|A)$$

  - si *A* est connu, *J* n'intervient pas dans le calcul
  - **connaître** *A* « bloque » le chemin entre *J* et *M*

P(*c*)
.001

P(*s*)
.002



C	*S*	*P*(*a*)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	*P*(*j*)
V	.90
F	.05

A	*P*(*m*)
V	.70
F	.01

Indépendance conditionnelle dans un RB

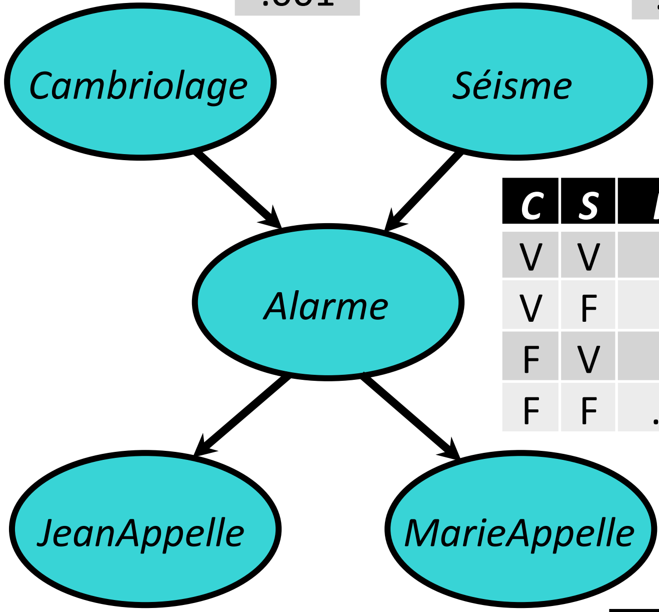
$P(M|A,J) = P(M,A,J) \,/\, P(A,J)$

$$= \frac{\Sigma_s \Sigma_c P(M,A,J,S{=}s,C{=}c)}{\Sigma_s \Sigma_c P(A,J,S{=}s,C{=}c)}$$

$$= \frac{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\, P(M|A)\, P(A,S{=}s,C{=}c)}{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\, P(A,S{=}s,C{=}c)}$$

$$= P(M|A) \frac{\cancel{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\, P(A,S{=}s,C{=}c)}}{\cancel{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\, P(A,S{=}s,C{=}c)}}$$

$$= P(M|A)$$



P(c)
.001

P(s)
.002

C	*S*	*P(a)*
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	*P(j)*
V	.90
F	.05

A	*P(m)*
V	.70
F	.01

Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

Indépendance conditionnelle dans un RB

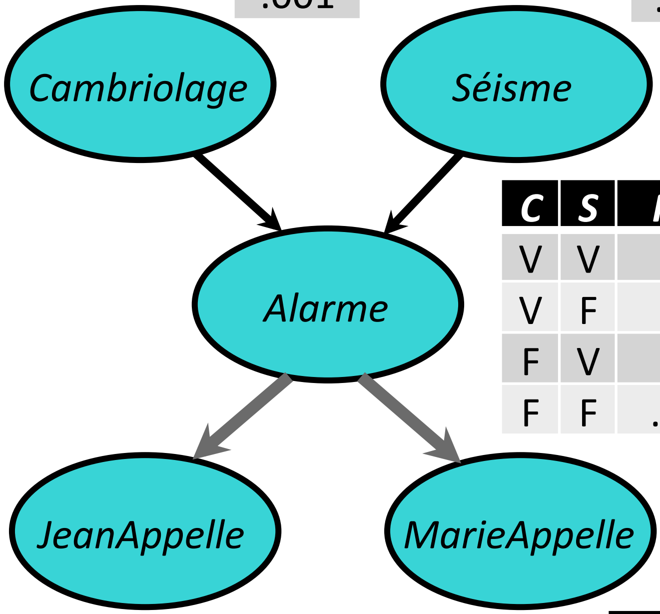
$$P(M|A,J) = P(M,A,J) \,/\, P(A,J)$$

$$= \frac{\Sigma_s \Sigma_c P(M,A,J,S{=}s,C{=}c)}{\Sigma_s \Sigma_c P(A,J,S{=}s,C{=}c)}$$

$$= \frac{\Sigma_s \Sigma_c \mathbf{P(J|A)\ P(M|A)}\ P(A,S{=}s,C{=}c)}{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\ P(A,S{=}s,C{=}c)}$$

$$= P(M|A) \frac{\cancel{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\ P(A,S{=}s,C{=}c)}}{\cancel{\Sigma_s \Sigma_c P(J|A)\ P(A,S{=}s,C{=}c)}}$$

$$= P(M|A)$$



P(c)
.001

P(s)
.002

C	S	P(a)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	P(j)
V	.90
F	.05

A	P(m)
V	.70
F	.01

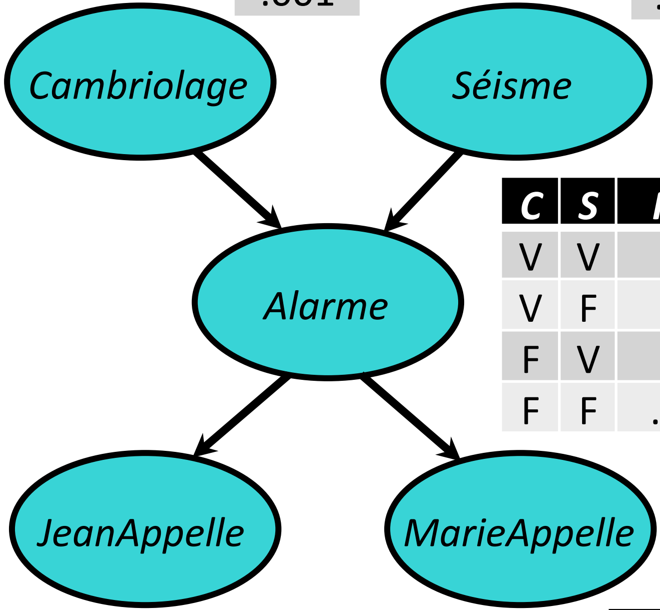
Indépendance conditionnelle dans un RB

3. Relation entre **deux parents** étant donné enfant :
   - sont indépendants si enfant **non-**observé

- Exemples :
   - *Cambriolage* et *Séisme* sont **indépendants** a priori
   - mais ils sont **dépendants** étant donné *Alarme*
      - » $P(C|A,S)$ n'est pas simplifiable, parce que $P(A|C,S)$ n'est pas simplifiable
   - **ne pas connaître** *A* « bloque » le chemin entre *C* et *S*

P(c)
.001

P(s)
.002



C	*S*	*P(a)*
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	*P(j)*
V	.90
F	.05

A	*P(m)*
V	.70
F	.01

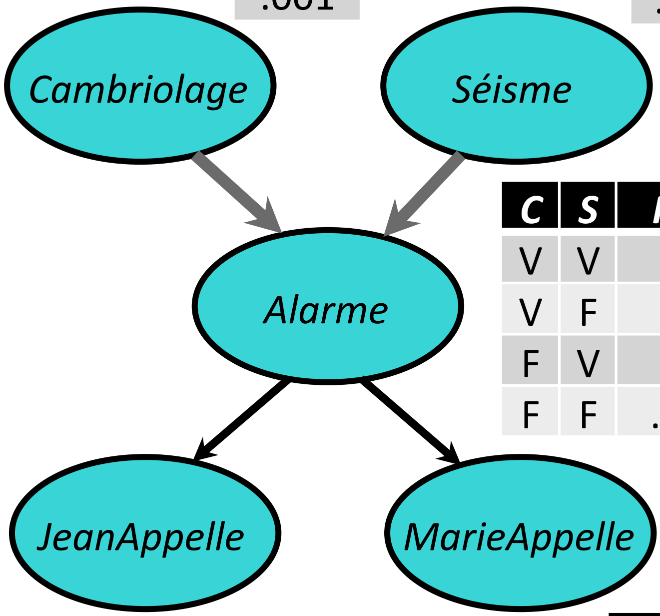
Indépendance conditionnelle dans un RB

$$P(C|A,S) = P(C,A,S) \;/\; P(A,S)$$

$$= \frac{\mathbf{P(A|S,C)}\, P(S)\, P(C)}{\Sigma_c\, P(A|S)\, P(S)\, P(C)}$$

P(c)
.001

P(s)
.002



C	S	P(a)
V	V	.95
V	F	.94
F	V	.29
F	F	.001

A	P(j)
V	.90
F	.05

A	P(m)
V	.70
F	.01