# Requête dans un RB

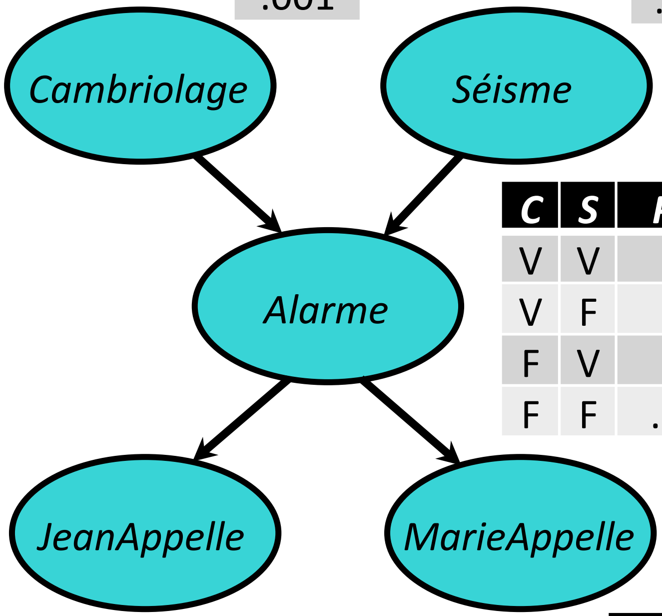
- L'usage principal d'un RB est de calculer les probabilités a posteriori, étant donné un événement observé
  - un événement est une assignation de valeurs à certaines variables d'observation
  - ex. : sachant le résultat d'une batterie de tests, quelle est maintenant la probabilité qu'un patient ait une maladie *X* ?
- On va noter
  - *X* **l'ensemble** de variables pour lesquelles on fait une requête
    - ex. : la patient a la maladie *X*
  - *E* l'ensemble des variables d'observation et *e* les valeurs observées
    - ex. : $E_i = e_i$ est le résultat d'un test
  - *Y* l'ensemble des variables cachées (qui ne sont pas observées)
    - ex. : $Y_i$ est le résultat de tests qui n'ont pas été faits
- Une **requête** est l'inférence de $\mathbf{P}(X|e)$, où *e* est une assignation de valeurs aux variables dans *E*

# Requête dans un RB

- Exemple :

  **P**(*Cambriolage* | *JeanAppelle* = *vrai*,
  *MarieAppelle* = *vrai* )
  = [ 0.284, 0.716 ]

- Comment fait-on un tel calcul?
  - **inférence exacte** (prohibitif)
    - » **par énumération**
  - **inférence approximative par échantillonnage** avec les méthodes Monte-Carlo (plus efficace)
    - » **méthode de rejet**




| *P*(*c*) |
|---|
| .001 |

| *P*(*s*) |
|---|
| .002 |

| *C* | *S* | *P*(*a*) |
|---|---|---|
| V | V | .95 |
| V | F | .94 |
| F | V | .29 |
| F | F | .001 |

| *A* | *P*(*j*) |
|---|---|
| V | .90 |
| F | .05 |

| *A* | *P*(*m*) |
|---|---|
| V | .70 |
| F | .01 |


Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

# Inférence par énumération

- On veut calculer la distribution sur les variables de requêtes **sachant** les observations

$$\mathbf{P}(X|e) = \mathbf{P}(X,E{=}e)/\alpha = \Sigma_y\, \mathbf{P}(X, e, y) \,/\, \alpha$$

- Les termes $P(X, e, y)$ peuvent s'écrire comme le produit des probabilités conditionnelles du réseau
- On peut donc calculer la réponse à une requête $P(X|e)$ dans un RB, simplement en
  1. calculant les sommes des produits des probabilités conditionnelles du RB
  2. normalisant ces sommes de façon à obtenir une distribution qui somme à 1
- Les ensembles des variables $X$, $E$ et $Y$ couvrent ensemble tous les noeuds
  - complexité en temps : $O(n\, d^{\,|X|+|Y|})$, avec $d$ la taille du plus grand domaine
  - complexité en espace : $O(d^{|X|})$, pour stocker la distribution

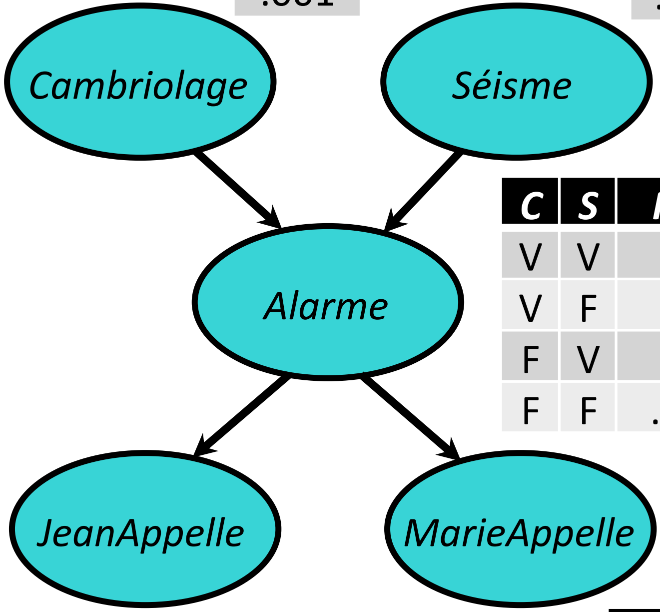
# Exemple

- **P**(*Cambriolage* | *JeanAppelle = vrai*, *MarieAppelle = vrai*)
  - noté **P**(*C* | *J*=V, *M*=V)

- Les variables cachées sont *Séisme* et *Alarme*

$$\mathbf{P}(C \mid J{=}V, M{=}V) = \Sigma_{s,a}\, \mathbf{P}(C, s, a, J{=}V, M{=}V) \,/\, \alpha$$
$$= \Sigma_{s}\, \Sigma_{a}\, \mathbf{P}(C, s, a, J{=}V, M{=}V) \,/\, \alpha$$

- Note :
  - *s* et *a* prennent toutes les valeurs possibles pour *S*=*s* et *A*=*a*




| ***P(c)*** |
|---|
| .001 |

| ***P(s)*** |
|---|
| .002 |

| ***C*** | ***S*** | ***P(a)*** |
|---|---|---|
| V | V | .95 |
| V | F | .94 |
| F | V | .29 |
| F | F | .001 |

| ***A*** | ***P(j)*** |
|---|---|
| V | .90 |
| F | .05 |

| ***A*** | ***P(m)*** |
|---|---|
| V | .70 |
| F | .01 |

# Exemple

- $\mathbf{P}(C \mid J{=}V, M{=}V) = \Sigma_{s,a}\, \mathbf{P}(C, s, a, j, m) / \alpha$
- On calcule pour $C = vrai$

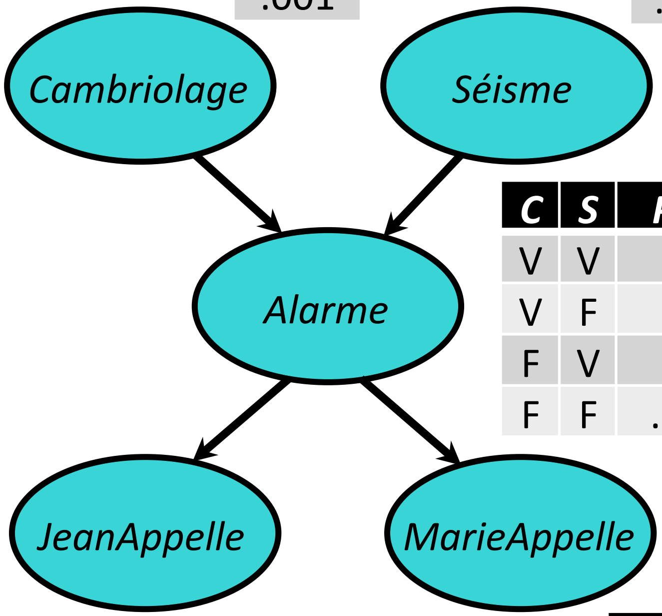
$P(C{=}V \mid J{=}V, M{=}V)$
$= \Sigma_{s,a}\, P(C{=}V)\, P(s)\, P(a|C{=}V,s)\, P(J{=}V|a)\, P(M{=}V|a) / \alpha$
$= (\,0.001{*}0.002{*}0.95{*}0.90{*}0.70+$
$0.001{*}0.998{*}0.94{*}0.90{*}0.70+$
$0.001{*}0.002{*}0.05{*}0.05{*}0.01+$
$0.001{*}0.998{*}0.06{*}0.05{*}0.01) / \alpha$
$= 0.00059224 / \alpha$

- Et $C = faux$

$P(C{=}F \mid J{=}V, M{=}V)$
$= \Sigma_{s,a}\, P(C{=}F)\, P(s)\, P(a|C{=}F,s)\, P(J{=}V|a)\, P(M{=}V|a) / \alpha$
$= 0.0014919 / \alpha$

$\alpha = 0.00059224 + 0.0014919$

- Donc, $\mathbf{P}(C \mid J{=}V, M{=}V) = [0.284, 0.716]$




| P(c) |
|---|
| .001 |

| P(s) |
|---|
| .002 |

| C | S | P(a) |
|---|---|---|
| V | V | .95 |
| V | F | .94 |
| F | V | .29 |
| F | F | .001 |

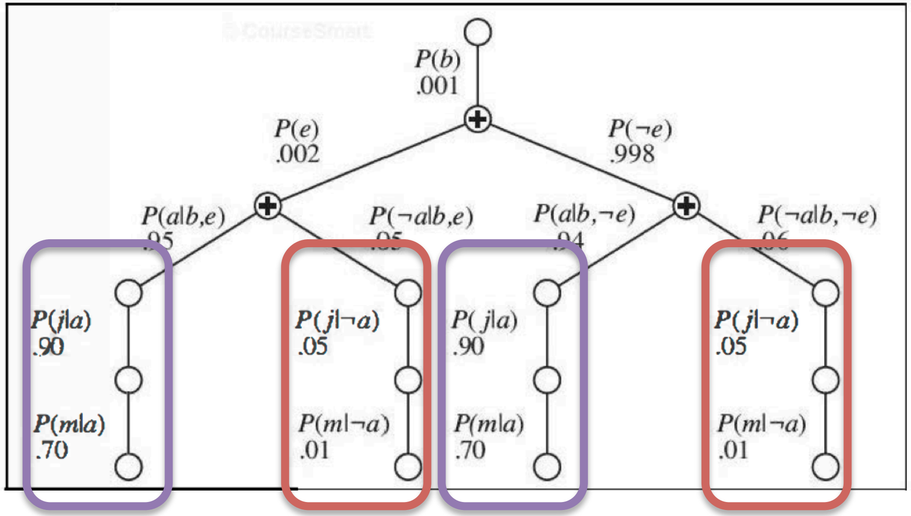
| A | P(j) |
|---|---|
| V | .90 |
| F | .05 |

| A | P(m) |
|---|---|
| V | .70 |
| F | .01 |


Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

# Inférence par élimination des variables

- Même principe que l'inférence par énumération, mais on évite les répétions de calculs déjà faits (comme en programmation dynamique)




- Voir section 14.4.2 du livre

# Inférence approximative

- Les méthodes d'inférence exactes sont inefficaces
  - le problème d'inférence est NP-Complet

- Les méthodes d'inférence approximatives sont plus pratiques
  - en général, on n'a pas besoin d'un calcul exact des probabilités pour qu'une conclusion tirée d'un RB soit correcte
  - une méthode approximative pourrait assigner des valeurs aux variables aléatoires en fonction des TPC associées à ces variables
  - ces assignations sont basées sur des simulations stochastiques, plutôt que des observations réelles

# Méthode de rejet (*rejection sampling*)

- **Idée :** simuler des observations complètes du RB et estimer les probabilités à partir des fréquences (relatives) des observations échantillonnées

  $P(X=x|e) = \Sigma_y P(X=x, e, y) / \alpha \approx \text{freq}(x,e) / \Sigma_{x'} \text{freq}(x',e) = \text{freq}(x,e) / \text{freq}(e)$

  où freq($x$,$e$) est le nombre de fois que $X=x$ et $E=e$ a été échantillonné
  et freq($e$) = $\Sigma_{x'}$ freq($x'$,$e$) est le nombre de fois que $E=e$

- Cette technique est appelée **méthode de rejet** (***rejection sampling***)
  - le problème avec cette méthode est que si $e$ est très rare selon le RB, il y aura peu d'échantillons qui correspondront à cette observation
  - d'autres méthodes sont plus efficaces et nécessitent moins d'échantillons pour obtenir une bonne estimation
  - voir la section 14.5 dans le livre

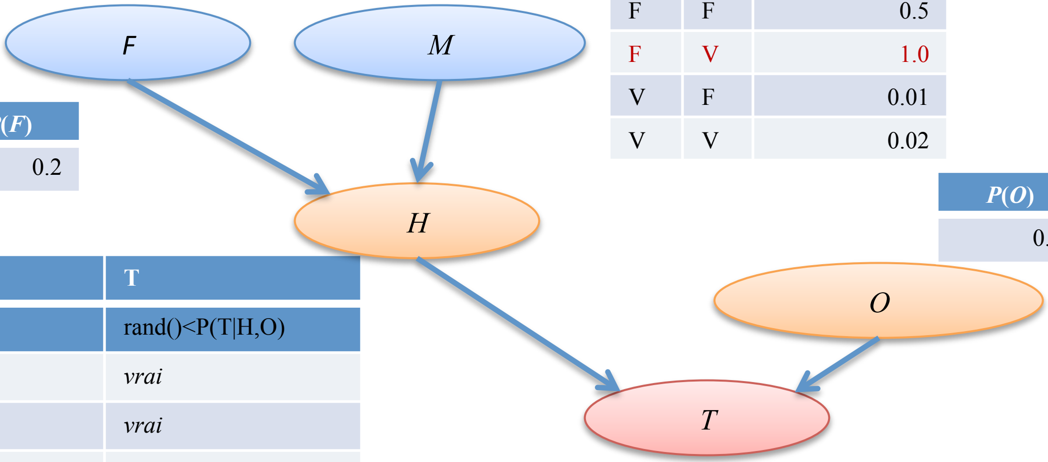

Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

# Exemple

**Requête :**
Calculer $P(T=vrai|M=vrai)$

**Variables connues :** $M = vrai$
**Variables inconnues :** $H, O, F$

| *P(F)* |
|---|
| 0.2 |




| *F* | *M* | *P(H\|F,M)* |
|---|---|---|
| F | F | 0.5 |
| F | V | 1.0 |
| V | F | 0.01 |
| V | V | 0.02 |

| *P(O)* |
|---|
| 0.6 |

| | F | H | O | T |
|---|---|---|---|---|
| # | rand()<0.2 | rand()<P(H\|F,M) | rand()<0.6 | rand()<P(T\|H,O) |
| 1 | *faux* | *vrai* | *vrai* | *vrai* |
| 2 | *faux* | *vrai* | *vrai* | *vrai* |
| 3 | *faux* | *vrai* | *faux* | *faux* |
| 4 | *vrai* | *faux* | *faux* | *faux* |
| 5 | *faux* | *vrai* | *vrai* | *vrai* |
| 6 | *faux* | *vrai* | *vrai* | *vrai* |
| 7 | *faux* | *vrai* | *vrai* | *vrai* |
| 8 | *faux* | *vrai* | *faux* | *vrai* |
| | | | Moyenne de *T=vrai* | 6/8 = **0.75** |

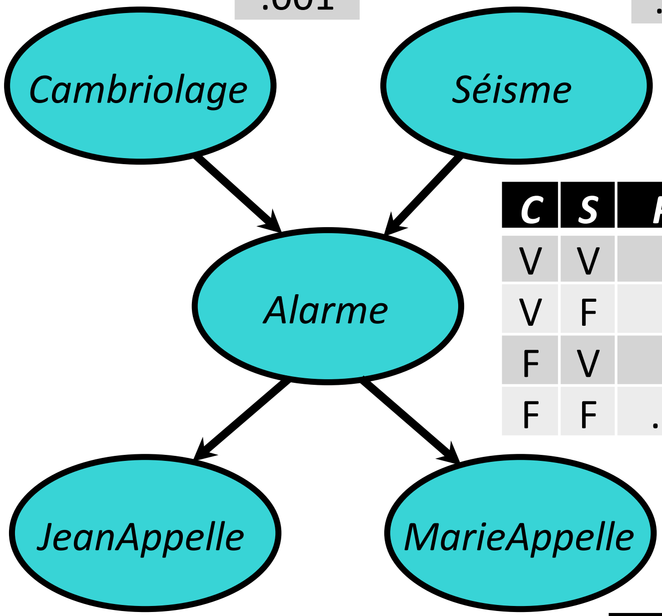
(vrai réponse : 0.71)

**Plus qu'il y a d'échantillon, plus l'erreur d'estimation est faible.**

| *H* | *O* | *P(T\|H,O)* |
|---|---|---|
| F | F | 0.1 |
| F | V | 0.5 |
| V | F | 0.5 |
| V | V | 1.0 |

# Types d'interrogations d'un RB

- **Diagnostique** (on connaît les effets, on cherche les causes)
  - P(*Cambriolage*|*JeanAppelle*=*vrai*)
  - garder à l'esprit qu'on a des arcs « causes / effets ».
- **Prédiction** (étant données les causes, quels sont les effets)
  - P(*JeanAppelle*|*Cambriolage*=*vrai*)
- **Probabilité conjointe ou marginale**
  - P(*Alarme*)




| *P*(*c*) |
|---|
| .001 |

| *P*(*s*) |
|---|
| .002 |

| *C* | *S* | *P*(*a*) |
|---|---|---|
| V | V | .95 |
| V | F | .94 |
| F | V | .29 |
| F | F | .001 |

| *A* | *P*(*j*) |
|---|---|
| V | .90 |
| F | .05 |

| *A* | *P*(*m*) |
|---|---|
| V | .70 |
| F | .01 |


Hugo Larochelle et Froduald Kabanza

# Exemple 1 : Évaluation par énumérations

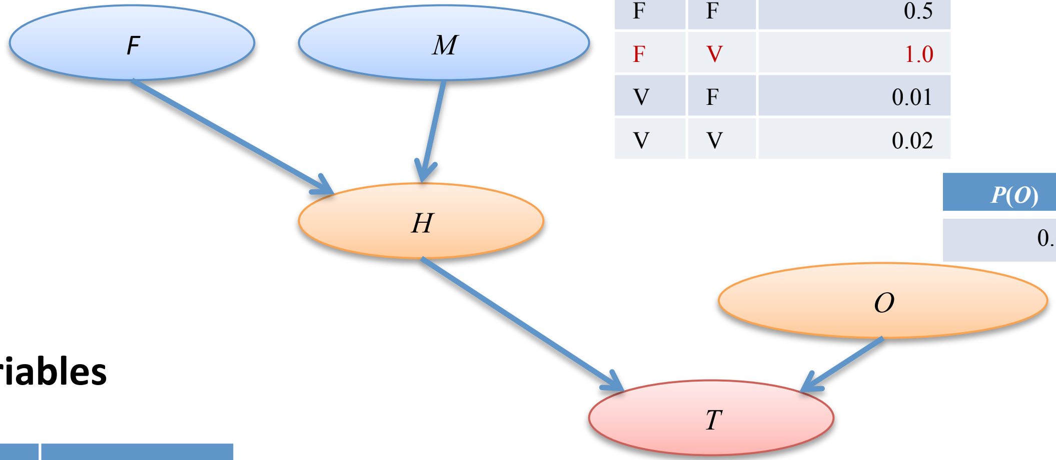
**Requête :**

Calculer *P*(*T=vrai*|*F=faux, M=vrai*)

**Variables connues :** *F = faux, M = vrai*

**Variables inconnues :** *H, O*

| *F* | *M* | *P(H\|F,M)* |
|---|---|---|
| F | F | 0.5 |
| F | V | 1.0 |
| V | F | 0.01 |
| V | V | 0.02 |




| *P(O)* |
|---|
| 0.6 |

| *H* | *O* | *P(T\|H,O)* |
|---|---|---|
| F | F | 0.1 |
| F | V | 0.5 |
| V | F | 0.5 |
| V | V | 1.0 |

**Énumération des valeurs possible des variables cachées (2*2)**

| *H* | *O* | *P(H\|F,M) * P(O)*P(T\|H,O)* | = |
|---|---|---|---|
| F | F | 0.0 * 0.4 * 0.1 | 0 |
| F | V | 0.0 * 0.6 * 0.5 | 0 |
| V | F | 1.0 * 0.4 * 0.5 | 0.20 |
| V | V | 1.0 * 0.6 * 1.0 | 0.60 |
| | | **TOTAL** | **0.80** |

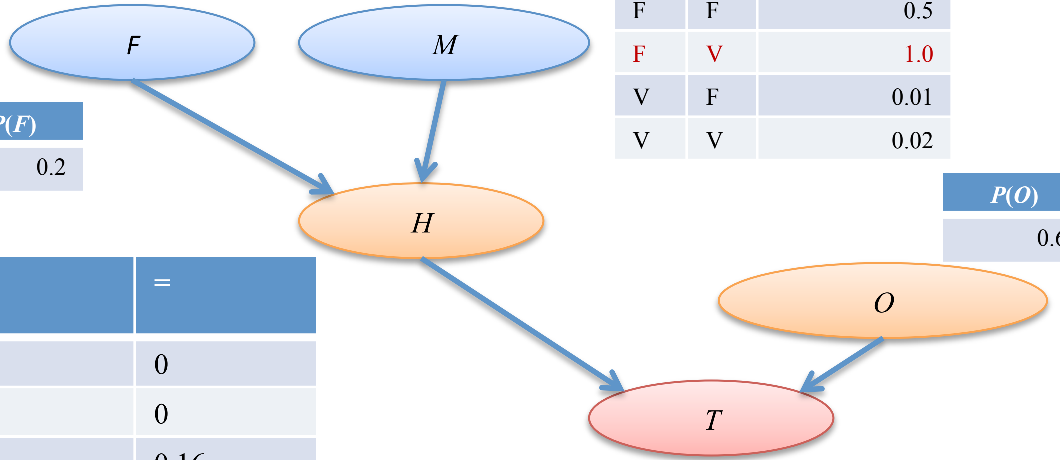
# Exemple 2 : Évaluation par énumérations

**Requête** :

Calculer $P(T{=}vrai \mid M{=}vrai)$

**Variables connues :** $M = vrai$

**Variables inconnues :** $H, O, F$




| P(F) |
| ---: |
| 0.2 |

| F | M | P(H\|F,M) |
|---|---|---:|
| F | F | 0.5 |
| F | V | 1.0 |
| V | F | 0.01 |
| V | V | 0.02 |

| P(O) |
| ---: |
| 0.6 |

| H | O | P(T\|H,O) |
|---|---|---:|
| F | F | 0.1 |
| F | V | 0.5 |
| V | F | 0.5 |
| V | V | 1.0 |

| F | H | O | P(F)*P(H\|F,M)*P(O)* P(T \| H, O,) | = |
|---|---|---|---|---|
| F | F | F | 0.8 * 0.0 * 0.4 * 0.1 | 0 |
| F | F | V | 0.8 * 0.0 * 0.6 * 0.5 | 0 |
| F | V | F | 0.8 * 1.0 * 0.4 * 0.5 | 0.16 |
| F | V | V | 0.8 * 1.0 * 0.6 * 1.0 | 0.48 |
| V | F | F | 0.2 * 0.98 * 0.4 * 0.1 | 0.00784 |
| V | F | V | 0.2 * 0.98 * 0.6 * 0.5 | 0.0588 |
| V | V | F | 0.2 * 0.02 * 0.4 * 0.5 | 0.0008 |
| V | V | V | 0.2 * 0.02 * 0.6 * 1.0 | 0.0024 |
| | | | **TOTAL** | **0.71** |